

سامانه بانک تستی

FlowRax

فـ لـ رـ اـ خ

Math

@Flow_KonKour



@LoPRax_KonKour



کلیک کن وباماهمراه شو!

۱

$$f(x) = 3 - \log_3(a-b^x) \Rightarrow y-3 = -\log_3(a-b^x) \Rightarrow 3^{3-y} = (a-b^x) \Rightarrow b^x = a-3^{3-y}$$

$$\Rightarrow x = \log_b(a-3^{3-y}) \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_b(a-3^{3-x})$$

پس، $a=2$ و $b=4$ ، به همین جهت، $\log_b^a = \log_4^2 = \frac{1}{2}$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲

ابتدا می‌دانیم: $\log_{ab}^a + \log_{ab}^b = \log_{ab}^{ab} = 1$

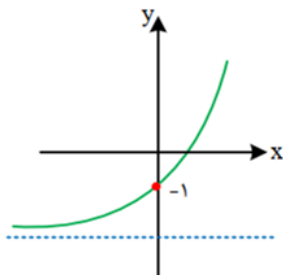
$$4 + \log_{ab}^b = 1 \Rightarrow \log_{ab}^b = -3 \Rightarrow \log_b^{ab} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \log_{b^3}^{ab} = -\frac{1}{6}$$

پس:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳

می‌دانیم نمودار یک تابع و وارون آن نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ناحیه‌های اول و سوم) قرینه هستند پس نمودار تابع f به صورت زیر است:



با توجه به نمودار رسم شده به وضوح $a=-5$ است. پس ضابطه تابع $f(x) = -5 + 2^{x-b}$ می‌باشد و چون عرض از مبدأ نمودار تابع -1 است، برای محاسبه مقدار b می‌توان نوشت:

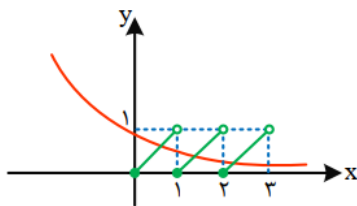
$$f(0) = -1 \Rightarrow -5 + 2^{-b} = -1 \Rightarrow 2^{-b} = 4 \Rightarrow b = -2$$

پس ضابطه تابع به صورت $f(x) = -5 + 2^{x+2}$ یا $f(x) = -5 + 4(2^x)$ است. برای محاسبه $f(\log_2^3)$ داریم:

$$f(\log_2^3) = -5 + 4(2^{\log_2^3}) = -5 + 4(3) = 12 - 5 = 7$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴



معادله را به شکل $(\frac{1}{3})^x = x - [x]$ در می‌آوریم و هر دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم.

معلوم است که تابع $(\frac{1}{3})^x$ ، در بازه $[0, 1.00]$ ، 1.00 شاخه تابع $y = x - [x]$ را قطع می‌کند.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$f(x) = \log_7(4-|x|) + \sqrt{\log\left(\frac{1-x-x^2}{9}\right)}$$

$$4-|x| > 0 \Rightarrow |x| < 4 \Rightarrow -4 < x < 4 \quad (1)$$

$$\frac{1-x-x^2}{9} > 0 \Rightarrow 1-x-x^2 > 0 \Rightarrow x(1-x) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 < x < 1 \quad (2)$$

$$\log\left(\frac{1-x-x^2}{9}\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{1-x-x^2}{9} \geq 1 \Rightarrow 1-x-x^2 \geq 9 \Rightarrow x^2-1 \cdot x+9 \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x-9) \leq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1 \leq x \leq 9 \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1 \leq x < 4 \Rightarrow D_f = [1, 4)$$

پس دامنه تابع شامل ۳ عدد صحیح است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$\log_6^A = k \Rightarrow \log_6^E = \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{1}{3} \log_6^E = \frac{1}{k} \Rightarrow \log_6^E = \frac{3}{k}$$

می دانیم:

$$\Rightarrow \log_6^E + \log_6^F = \frac{3}{k} \Rightarrow \log_6^F = \frac{3}{k} - 1$$

$$\log_{16}^{1A} = \frac{1}{4} \log_6^{1A} = \frac{1}{4} (\log_6^A + \log_6^F) = \frac{1}{4} (2 \log_6^F + 1)$$

خواهیم داشت:

$$= \frac{1}{4} (2(\frac{3}{k} - 1) + 1) = \frac{1}{4} (\frac{6}{k} - 1) = \frac{6-k}{4k}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

باکتری‌ها هر نیم‌ساعت دو برابر می‌شوند، پس هر ساعت ۴ برابر می‌شوند، بنابراین رابطه جمعیت آن‌ها بر حسب ساعت برابر است با:

$$f(t) = 100 \times 4^t = 400 \rightarrow 4^t = 4 \rightarrow t = \log_4^4 = \frac{\log 4}{\log 4} = \frac{1 - \log 2}{2 \log 2} = \frac{1 - 0.3}{2(0.3)} = \frac{0.7}{0.6} = \frac{7}{6} h$$

$$= \frac{7}{6} \times 60 \text{ min} = 70 \text{ min}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

تابع $y = g(x)$ به ازای تمامی مقادیر a از رأس سهمی یعنی $(1, 2)$ عبور می‌کند.

بنابراین تابع f نیز باید همواره از نقطه $A(1, 2)$ عبور کند.

$$f(1) = 2 \Rightarrow 2^{a+b} + 1 = 2 \Rightarrow 2^{a+b} = 1 \Rightarrow a+b = 0 \Rightarrow b = -a$$

خواهیم داشت:

$$f(x) = 2^{ax-a} + 1 \xrightarrow{f(a)=\Delta} \Delta = 2^{a^2-a} + 1 \Rightarrow 2^{a^2-a} = \Delta \rightarrow a^2 - a = 2$$

$$\Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \rightarrow g(x) = -(x-1)^2 + 2 \rightarrow g(-1) = -2 \\ a = 2 \rightarrow g(x) = 2(x-1)^2 + 2 \rightarrow g(2) = 4 \end{cases}$$

بنابراین: $4 - 2 = 2$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\log_7^{(7+2\sqrt{6})} - \log_7^{\left(\frac{1}{\sqrt{6}-1}\right)} &= \frac{1}{7} \log_7^{(7+2\sqrt{6})} + \log_7^{(\sqrt{6}-1)} = \log_7^{\sqrt{7+2\sqrt{6}}} + \log_7^{(\sqrt{6}-1)} = \log_7^{\sqrt{(\sqrt{6}+1)^2}} + \log_7^{(\sqrt{6}-1)} \\ &= \log_7^{(\sqrt{6}+1)} + \log_7^{(\sqrt{6}-1)} = \log_7^{(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}-1)} = \log_7^{\Delta} = \log_7^{\frac{1}{7}} = \log_7^1 - \log_7^7 = \frac{1}{\log_7^7} - 1 = \frac{1}{7} - 1 = \frac{1}{7} - \frac{7}{7} = \frac{1-7}{7} = \frac{-6}{7}\end{aligned}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$\begin{aligned}\log_{\Delta}^{72} &= \frac{\log_{15}^{72}}{\log_{15}^{\Delta}} = \frac{\log_{15}^{2^3 \times 3^2}}{\log_{15}^{2^2 \times 5^2}} = \frac{\log_{15}^{2^3} + \log_{15}^{3^2}}{\log_{15}^{2^2} + \log_{15}^{5^2}} \\ &= \frac{3 \log_{15}^2 + 2 \log_{15}^3}{2 \log_{15}^2 + 2 \log_{15}^5} = \frac{3(0/25) + 2(1-0/5)}{2(0/25) + 2(0/5)} = \frac{0/25 + 0/5}{0/25 + 1/5} = \frac{1/55}{2/3} = \frac{155}{230} = \frac{31}{46}\end{aligned}$$

توجه شود که چون $\log_{15}^{\Delta} = 0/6$ و $\log_{15}^2 + \log_{15}^5 = 1$ ، بنابراین $\log_{15}^{\Delta} = 1 - 0/6 = 0/4$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

اگر زلزله‌ای با بزرگی M ریشتر رخ دهد، انرژی آزاد شده آن برحسب واحد آرگ از رابطه $\log E = 11/8 + 1/5 M$ به دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$\log E = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow E = 10^{11/8 + 1/5 M}$$

$$\begin{cases} \text{زلزله اصلی: } E_1 = 10^{11/8 + 1/5 M_1} \\ \text{پس‌لرزه: } E_2 = 10^{11/8 + 1/5 M_2} \end{cases} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = 10^{1/5(M_1 - M_2)}$$

$$M_1 - M_2 = 1/4 \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = 10^{1/5(1/4)} = 10^{2/1}$$

حال توجه شود که چون $\log 2 = 0/3$ ، پس $10^{2/3} = 2$ خواهد بود و بنابراین داریم:

$$\frac{E_1}{E_2} = 10^{2/1} = (10^{0/3})^2 = 2^2 = 4$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

اگر مقدار اولیه عنصر را x در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$x \xrightarrow{\text{یک ساعت بعد}} \frac{15}{16}x \xrightarrow{\text{یک ساعت بعد}} \frac{15}{16} \left(\frac{15}{16}x \right) = \left(\frac{15}{16} \right)^2 x \rightarrow \dots$$

بنابراین، بعد از n ساعت، $\left(\frac{15}{16}\right)^n x$ از جرم جسم باقی می‌ماند. پس طبق صورت مسئله باید داشته باشیم:

$$\left(\frac{15}{16}\right)^n x = \frac{1}{12}x \Rightarrow \left(\frac{15}{16}\right)^n = \frac{1}{12} \Rightarrow \log\left(\frac{15}{16}\right)^n = \log \frac{1}{12}$$

$$n(\log 15 - \log 16) = -\log 12 \Rightarrow n(\log 3 + \log 5 - 4 \log 2) = -(\log 2^2 + \log 3)$$

چون $\log 2 = 1 - \log 5$ ، پس $\log 2 = 0/31$ و بنابراین داریم:

$$n = \frac{-(2(0/31) + 0/47)}{0/47 + 0/69 - 4(0/31)} = \frac{-1/09}{-0/08} = \frac{109}{8}$$

$$13/625 \times 60' = 817/5 \text{ دقیقه}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$\lambda^{x+1} - 5 \times \lambda^x - \frac{47}{2} \times \lambda^{x-1} = 2^{\sqrt{3}-1}$$

$$\lambda^x \times \lambda - 5 \times \lambda^x - \frac{47}{2} \times \frac{\lambda^x}{\lambda} = 2^{\sqrt{3}-1} \Rightarrow (\lambda - 5 - \frac{47}{16}) \times \lambda^x = 2^{\sqrt{3}-2} \Rightarrow \frac{1}{16} \times \lambda^x = 2^{\sqrt{3}-2}$$

$$\Rightarrow \lambda^x = 2^{\sqrt{3}-2} \times 2^4 \Rightarrow 2^{3x} = 2^{\sqrt{3}+2} \Rightarrow 3x = \sqrt{3}+2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}+2}{3}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{4\lambda + 4 + 16\sqrt{3}}{9} \Rightarrow 9x^2 = 52 + 16\sqrt{3} \Rightarrow 9x^2 - 52 = 16\sqrt{3} \Rightarrow \log_3(9x^2 - 52) = \log_3 16\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} = 1/7 \Rightarrow 16\sqrt{3} = 27/...$$

$$27 < 16\sqrt{3} < 81 \Rightarrow \log_3^{27} < \log_3^{16\sqrt{3}} < \log_3^{81}$$

$$\Rightarrow 3 < \log_3^{16\sqrt{3}} < 4 \Rightarrow \log_3(9x^2 - 52) \in (3, 4)$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{x+1}{1-x}} \geq -2 \xrightarrow{\text{چون مبنا بین صفر و یک است}} \frac{x+1}{1-x} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Rightarrow \frac{x+1}{1-x} \leq 4$$

$$\frac{x+1}{1-x} - 4 \leq 0 \Rightarrow \frac{5x-3}{1-x} \leq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x \leq \frac{3}{5} \text{ یا } x > 1 \quad (1)$$

از طرفی، با توجه به دامنه تابع لگاریتم داریم:

$$\frac{x+1}{1-x} > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < x < 1 \quad (2)$$

$$(1), (2) \xrightarrow{\text{اشتراک}} -1 < x \leq \frac{3}{5} \Rightarrow A = \left(-1, \frac{3}{5}\right]$$

$$(2x + \log x^2)^2 - 1 < 8x^2 + 12x^2 + 6x \Rightarrow (2x + \log x^2)^2 < 8x^2 + 12x^2 + 6x + 1$$

$$\Rightarrow (2x + \log x^2)^2 < (2x+1)^2 \Rightarrow 2x + \log x^2 < 2x+1$$

$$\Rightarrow \log x^2 < 1 \Rightarrow \log x^2 < \log 10 \Rightarrow x^2 < 10 \Rightarrow -\sqrt{10} < x < \sqrt{10}$$

با توجه به دامنه تابع لگاریتم باید $x^2 > 0$ یعنی $x \neq 0$ باشد، پس مجموعه جواب نامعادله به صورت $B = (-\sqrt{10}, 0) \cup (0, \sqrt{10})$ است.

$$A \cap B = (-1, 0) \cup \left(0, \frac{3}{5}\right]$$

در مجموعه $(A \cap B)$ ، هیچ عدد صحیح وجود ندارد.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$\log_{\sqrt[5]{64}} \sqrt[3]{4} = \log_{\frac{2}{\sqrt[5]{64}}} \frac{2}{\sqrt[3]{64}} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} \log_2 2 = \frac{5}{9} = 0.55$$

$$(0.55)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{1.000} = \sqrt[5]{125} \approx 2.3 / \dots$$

توجه شود که $3^4 = 81$ و $4^4 = 256$ ، بنابراین $\sqrt[4]{125}$ عددی بین ۳ و ۴ است. بین دو عدد ۰.۵۵ و ۳/... فقط اعداد صحیح ۱، ۲، ۳ قرار دارند.

گزاره ب نادرست است، زیرا:

$$f(x) = \sqrt{2 - \log|x^2 - 9|} \Rightarrow 2 - \log|x^2 - 9| \geq 0 \Rightarrow \log|x^2 - 9| \leq 2 \Rightarrow 0 < |x^2 - 9| \leq 100$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x^2 - 9| > 0 \Rightarrow x \neq \pm 3 & (1) \\ |x^2 - 9| \leq 100 \Rightarrow -100 \leq x^2 - 9 \leq 100 \Rightarrow -91 \leq x^2 \leq 109 \end{cases}$$

چون شرط $x^2 \geq -91$ بدیهی است، پس فقط نامعادله $x^2 \leq 109$ را بررسی می‌کنیم:

$$x^2 \leq 109 \Rightarrow -\sqrt{109} \leq x \leq \sqrt{109} \Rightarrow -10.4 \dots \leq x \leq 10.4 \dots \quad (2)$$

چون اعداد صحیح واقع در دامنه تابع f موردنظر هستند، اعداد موردنظر تمامی اعداد صحیح بازه $[-10.4, 10.4]$ به جز ۳ و -۳ هستند (با توجه به روابط (۱) و (۲)) پس تعداد آن‌ها برابر $19 = 21 - 2$ عدد است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

چون نمودار تابع f از نقطه $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ می‌گذرد، پس $f(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}$ یعنی داریم:

$$\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3a+b} \right) = -\frac{1}{3} \Rightarrow -\log_{\frac{1}{3}} (3a+b) = -\frac{1}{3} \Rightarrow 3a+b=2 \quad (1)$$

همچنین طبق شکل، دامنه تابع، بازه $(\frac{1}{3}, +\infty)$ است، پس داریم:

$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3x+b} \right) \Rightarrow \frac{1}{3x+b} > 0 \Rightarrow 3x+b > 0 \Rightarrow 3x > -b$$

باید $a > 0$ باشد تا جهت نامساوی عوض نشود. (با توجه به دامنه تابع)

$$x > \frac{-b}{3} \Rightarrow -\frac{b}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow b = -1 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 3a - \frac{1}{3} = 2 \Rightarrow \frac{9a}{3} = \frac{7}{3} \Rightarrow a = \frac{7}{9} \Rightarrow b = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3x-1} \right) \Rightarrow \text{فرض: } f^{-1}(-1) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = -1$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3\alpha-1} \right) = -1 \Rightarrow \frac{1}{3\alpha-1} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3\alpha-1=3 \Rightarrow \alpha = \frac{4}{3}$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3\left(\frac{4}{3}\right)-1} = -\log_{\frac{1}{3}} 2 = -\log_{\frac{1}{3}} 2^5 = -\frac{5}{2} \log_{\frac{1}{3}} 2 = -\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{f^{-1}(-1)}{f\left(\frac{4}{3}\right)} = \frac{\frac{4}{3}}{-\frac{5}{2}} = -\frac{8}{15}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

تابع نمایی $y = a^x$ با شرط $0 < a < 1$ تابعی نزولی است، بنابراین باید داشته باشیم:

$$0 < \frac{2m+3}{21-4m} < 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{2m+3}{21-4m} > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -\frac{3}{2} < m < \frac{21}{4} \quad (1) \\ \frac{2m+3}{21-4m} < 1 \Rightarrow \frac{2m+3}{21-4m} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{6m-18}{21-4m} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < 3 \text{ یا } m > \frac{21}{4} \quad (2) \end{cases}$$

$$(1), (2) \xrightarrow{\text{اشتراک}} -\frac{3}{2} < m < 3$$

بنابراین، بزرگ‌ترین مقدار صحیح m برابر ۲ است.

$$\log_{\frac{1}{m}} \frac{1 \cdot m + 8}{m-1} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{28}{1} = -\log_2 \frac{28}{1}$$

$$16 < 28 < 32 \Rightarrow \log_2^{16} < \log_2^{28} < \log_2^{32} \Rightarrow 4 < \log_2^{28} < 5 \Rightarrow -5 < -\log_2^{28} < -4$$

پس، حاصل عبارت مطلوب در بازه $(-5, -4)$ قرار دارد.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$3^{3x+1} = 0.648 \Rightarrow 3^{3x} \times 3 = \frac{648}{1000} \Rightarrow 3^{3x} = \frac{216}{1000} \Rightarrow 3x = \log_3 \frac{216}{1000} \Rightarrow 3x = \log_3 \frac{2^3 \times 3^3}{10^3}$$

$$\Rightarrow 3x = \log_3^{2^3} + \log_3^{3^3} - \log_3^{10^3} \Rightarrow 3x = 3 \log_3^2 + 3 \log_3^3 - 3 \log_3^{10} \Rightarrow x = \log_3^2 - \log_3^{10} + 1$$

$$\Rightarrow x = \log_3^{2^{\frac{2}{10}}} + 1 = \log_3^{\frac{1}{5}} + 1 \Rightarrow -\log_3^5 = x - 1$$

$$\Rightarrow \log_3^5 = 1 - x \Rightarrow \log_3^x = \frac{1}{1-x} \quad (1)$$

$$25^{f(x)} = 4 \cdot 5 \Rightarrow f(x) = \log_{25}^{4 \cdot 5} = \log_{\frac{5}{2}}^{2^2 \times 5} = \log_{\frac{5}{2}}^{2^2} + \log_{\frac{5}{2}}^5$$

$$f(x) = 2 \log_{\frac{5}{2}}^2 + \frac{1}{2} \xrightarrow{(1)} f(x) = 2 \left(\frac{1}{1-x} \right) + \frac{1}{2} = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{2}$$

$$f(1/4) = \frac{2}{1-1/4} + \frac{1}{2} = -5 + \frac{1}{2} = -4.5$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$\frac{4^n - 4n^2}{2^n + 2n} = 16 - 2n \Rightarrow 2^n - 2n = 16 - 2n \Rightarrow n = 4$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰

می‌دانیم که اگر a, b, c جملات متوالی یک دنباله حسابی باشند، آن‌گاه $a + c = 2b$ ، پس:

$$\begin{aligned}
 1 + \log_7 \left((7^{x+1})^{-1} \right) &= 2 \log_7 (7^{2-x} + 4) \Rightarrow \log_7 + \log_7 \left((7^x \times 7)^{-1} \right) = \log_7 (7^{2-x} + 4) \\
 \Rightarrow \log_7 \left((7^x \times 7)^{-1} \right) &= \log_7 \left((7^x \times 7^{-x}) + 4 \right) \Rightarrow 6 \left((7^x \times 7) - 1 \right) = \left((4 \times 7^{-x}) + 4 \right) \\
 \Rightarrow (12 \times 7^x) - 6 &= \frac{4}{7^x} + 4 \Rightarrow (12 \times 7^x) - \frac{4}{7^x} = 10 \xrightarrow{\div 2} (6 \times 7^x) - \frac{4}{7^x} = 5
 \end{aligned}$$

حال، اگر 7^x را برابر t فرض کنیم، داریم:

$$6t - \frac{4}{t} = 5 \Rightarrow 6t^2 - 5t - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 7^x = -\frac{1}{6} \text{ غ ق ق} ; (7^x > 0) \\ t = 7^x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$7^x = \frac{4}{3} \Rightarrow \log_7 \frac{4}{3} = x \Rightarrow x = \log_7 4 - \log_7 3 \Rightarrow x = 2 - \log_7 3$$

بنابراین:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$\begin{aligned}
 x^{\log_7 7} &= 7 \Rightarrow (x^{\log_7 7})^{\log_7 7} = 7 \log_7 7 \\
 \Rightarrow x^{\log_7 7} &= 7 \log_7 7 \Rightarrow x^{\log_7 7} = 7 \log_7 7 = 49
 \end{aligned}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$(\log_7 x)^7 - 2(\log_7 x) - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \log_7 x = -1 \Rightarrow x = 7^{-1} \\ \log_7 x = 3 \Rightarrow x = 7^3 \end{cases} \Rightarrow \text{۹ = ضرب ریشه‌ها}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$\frac{1}{\log_6 7} - \frac{1}{\log_6 k} = 1 \Rightarrow \log_6 7 - \log_6 k = 1 \Rightarrow \log_6 7 - \frac{1}{7} \log_6 k = 1$$

$$\Rightarrow \log_6 7 - \log_6 \sqrt[6]{k} = 1 \Rightarrow \log_6 \sqrt[6]{k} = 1 \Rightarrow \frac{6}{\sqrt[6]{k}} = 2 \Rightarrow \sqrt[6]{k} = 3 \Rightarrow k = 9$$

$$\log_{k-1}^{rk+\Delta} = \log_{\lambda}^{r\gamma} = \log_{\gamma}^{\Delta} = \frac{5}{3}$$

خواهیم داشت:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

روشی اولی:

۲۴

با فرض $3^x = k$ خواهیم داشت:

$$y = 3^{rx} - 3^{rx+1} + 3^{x+1} = (3^x)^r - 3 \times (3^x)^r + 3 \times (3^x) = k^r - 3k^r + 3k = (k-1)^r + 1$$

$$\Rightarrow (k-1)^r = y-1 \Rightarrow k-1 = \sqrt[r]{y-1} \Rightarrow k = \sqrt[r]{y-1} + 1 \Rightarrow 3^x = \sqrt[r]{y-1} + 1$$

$$\Rightarrow x = \log_3 (\sqrt[r]{y-1} + 1) \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_3 (\sqrt[r]{x-1} + 1)$$

روشی دوم:

$$f(1) = 27 - 27 + 9 = 9 \Rightarrow f^{-1}(9) = 1$$

تنها گزینه ۱ درست است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۵

در تابع نمایی، اگر مولفه‌های اول تشکیل دنباله حسابی دهند، مولفه‌های دوم تشکیل دنباله هندسی می‌دهند.

دنباله a_1, a_3, a_5 و a_2, a_4 حسابی است، پس a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 دنباله هندسی است.

$$(a_2)^2 = (a_1)(a_3) \Rightarrow (\lambda + k)^2 = (\lambda + k)(\lambda + k)$$

$$\Rightarrow 64 + 16k + k^2 = k^2 + 24k + 16 \Rightarrow k = -2$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$\log_3 x = \frac{\log x}{\log 3}, \log_{12} x = \frac{\log x}{\log 12}$$

$$\frac{\log x}{\log 3} + \frac{\log x}{\log 12} = 2 \frac{\log x}{\log 3} \cdot \frac{\log x}{\log 12}$$

پس:

$$\Rightarrow \log x \left(\frac{\log 2 + \log 12}{\log 3 \log 12} \right) = 2 \log x \left(\frac{\log x}{\log 12 \log 3} \right)$$

$$\log x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow \log_3^{(2\alpha+4)} = \log_3^6$$

اولاً: می‌توانیم $\log x$ را حذف کنیم و داریم:

$$\log 3 + \log 12 = 2 \log x \Rightarrow \log 36 = \log x^2 \Rightarrow x^2 = 36$$

ثانیاً:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -6 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 6 \Rightarrow \log_3^{(2\alpha+4)} = \log_3^{16} = 4$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$f(x) = 2^{x+a} - 2^{x+b} + c = 2^x \times 2^a - 2^x \times 2^b + c = (2^a - 2^b)2^x + c = k \times 2^x + c$$

توجه کنید که:

از روی نمودار تابع f معلوم است که $f(0) = -1$ و $f(-1) = 0$ پس:

$$\begin{cases} f(0) = k \times 2^0 + c = -1 \Rightarrow k + c = -1 \\ f(-1) = k \times 2^{-1} + c = 0 \Rightarrow \frac{k}{2} + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -2 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = -2 \times 2^x + 1 \Rightarrow f(2) = -2 \times 2^2 + 1 = -7$$

در نتیجه:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 0 \Rightarrow \log_b^{\frac{a}{4}} = 0 \Rightarrow a = 4$$

نمودار تابع f از $(\frac{1}{4}, 0)$ عبور می‌کند.

$$g(2) = 0 \Rightarrow \log_a^{2b} = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

نمودار تابع g از $(2, 0)$ عبور می‌کند.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}}^{4x} = \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{x}{2}} \Rightarrow -\log_2^{4x} = \frac{1}{2} \log_2^{\frac{x}{2}}$$

خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \log_2^{\frac{1}{4x}} = \log_2^{\sqrt{\frac{x}{2}}} \Rightarrow \frac{1}{4x} = \sqrt{\frac{x}{2}} \Rightarrow \frac{1}{16x^2} = \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow x^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_{\frac{1}{4}}^{\frac{4 \times \frac{1}{2}}{2}} = -1$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۸

۲۹

$$\log_{\frac{1}{k}}^{\Delta} = k \Rightarrow \log_{\Delta}^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k} \Rightarrow \log_{\Delta}^{\Delta} + \log_{\Delta}^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k} \Rightarrow \log_{\Delta}^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k} - 1 = \frac{1-k}{k}$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \log_Y^{\tau\Delta} - \log_{Y\Delta}^{\tau\Delta} &= \log_Y^{\Delta} + \log_Y^{\gamma} - \log_{\Delta}^{\gamma} = \frac{k}{1-k} + 1 - \frac{1-k}{k} \\ &= \frac{k^{\gamma} + k(1-k) - (1-k)^{\gamma}}{k(1-k)} = \frac{-k^{\gamma} + \tau k - 1}{k - k^{\gamma}} = \frac{k^{\gamma} - \tau k + 1}{k^{\gamma} - k} \end{aligned}$$

(ما؛ ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

μ_0

طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} \mathbf{f}(1) = -1 \Rightarrow \mathbf{ba} + \delta = -1 \Rightarrow \mathbf{ba} = -\rho & (1) \\ \mathbf{f}(2) = -4 \Rightarrow \mathbf{ba}^2 + \delta = -4 \Rightarrow \mathbf{ba}^2 = -9 & (2) \end{cases}$$

با تقسیم دو طرف رابطه (۲) بر رابطه (۱) داریم:

با جای‌گذاری این مقدار در رابطه (۱) داریم: $\frac{3}{2}b = -6 \Rightarrow b = \frac{-6}{\frac{3}{2}} = -4$

بنابراین: $a + b = \frac{3}{2} - 4 = -\frac{5}{2}$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$\text{نکته ۱: } \log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b \quad , \quad \log_b a^n = n \log_b a \quad , \quad \log_a a = 1$$

$$\text{نکتہ ۲: } \log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2$$

ابتدا با استفاده از نکته ۲ داریم:

$$\log \Delta = 1 - \log \Upsilon = 1 - \cdot / \Upsilon = \cdot / \Upsilon$$

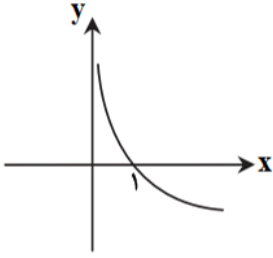
اکنون با استفاده از نکته ۱ داریم:

$$\log \frac{\sqrt[r]{\gamma}}{\sqrt[r]{\Delta}} = \log \sqrt[r]{\gamma} - \log \sqrt[r]{\Delta} = \log r^{\frac{r}{r}} - \log \Delta^{\frac{1}{r}} = \frac{r}{r} \log r - \frac{1}{r} \log \Delta = \frac{r}{r} (\cdot / r \Delta) - \frac{1}{r} (\cdot / r) = \cdot / r \gamma - \cdot / r \Delta = \cdot / \Delta \gamma \Delta$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

31

۳۲

نکته: نمودار تابع $y = \log_a x$ به ازای $0 < a < 1$ ، به صورت روبه‌رو است:نکته: در تابع وارون‌پذیر f داریم: $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$ نقطه $(\Delta, -1)$ بر روی نمودار تابع قرار دارد، پس داریم:

$$f(x) = \log_a x \Rightarrow f(\Delta) = -1 \Rightarrow \log_a \Delta = -1 \Rightarrow a^{-1} = \Delta \Rightarrow a = \frac{1}{\Delta} \Rightarrow f(x) = \log_{\frac{1}{\Delta}} x$$

$$f(\sqrt{\Delta}) = \log_{\frac{1}{\Delta}} \sqrt{\Delta} = m \Rightarrow \left(\frac{1}{\Delta}\right)^m = \sqrt{\Delta} \Rightarrow \Delta^{-m} = \Delta^{\frac{1}{2}} \Rightarrow -m = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2} \Rightarrow f(\sqrt{\Delta}) = -\frac{1}{2}$$

$$f^{-1}(-2) = n \Rightarrow f(n) = -2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{\Delta}} n = -2 \Rightarrow n = \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{-2} = (\Delta^{-1})^{-2} = \Delta^2 = 2\Delta \Rightarrow f^{-1}(-2) = 2\Delta$$

$$f(\sqrt{\Delta}) - f^{-1}(-2) = -\frac{1}{2} - 2\Delta = -\frac{\Delta}{2} \quad \text{بنابراین:}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳

نکته: تابع معکوس تابع نمایی $f(x) = a^x$ ($a > 0$ ، $a \neq 1$)، تابع لگاریتمی $f^{-1}(x) = \log_a x$ است.

با توجه به نکته بالا، داریم:

$$f^{-1}(x) = \log_a x : (\Delta, -1) \in f^{-1} \Rightarrow f^{-1}(\Delta) = -1 \Rightarrow \log_a \Delta = -1 \Rightarrow a^{-1} = \Delta \Rightarrow \frac{1}{a} = \Delta \Rightarrow a = \frac{1}{\Delta} \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{\Delta}} x$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$۱ \text{ نکته: } \log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

$$۲ \text{ نکته: } \log_a a = 1$$

$$۳ \text{ نکته: } \log_c a = \log_c b \Rightarrow a = b$$

$$۴ \text{ نکته: } \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

$$۵ \text{ نکته: } \log_c a^n = n \log_c a$$

$$\log_7 (x+2) = \log_7 (4-x) + 1 \Rightarrow \log_7 (x+2) = \log_7 (4-x) + \log_7 2$$

$$\Rightarrow \log_7 (x+2) = \log_7 (2(4-x)) \Rightarrow x+2 = 8-2x \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

$$\log_4 \sqrt[3]{x} = \log_4 \sqrt[3]{2} = \log_{4^2} 2^{\frac{1}{3}} = \frac{\log_2 2^{\frac{1}{3}}}{\log_2 2^2} = \frac{\frac{1}{3} \log_2 2}{2 \log_2 2} = \frac{1}{6}$$

بنابراین:

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۴

۳۵

نکته: مجموع ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ برابر $-\frac{b}{a}$ است.

نکته: $a^x = a^y \Rightarrow x = y \quad (a > 0, a \neq 1)$

نکته: $(a^x)^y = a^{xy}$

ابتدا طرفین معادله را هم پایه می‌کنیم:

$$9^{x+1} = 3^{(x-2)^2} \Rightarrow (3^2)^{x+1} = 3^{(x-2)^2} \Rightarrow 3^{2x+2} = 3^{x^2-4x+4} \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 2x + 2 \Rightarrow x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$\frac{-(-6)}{1} = 6$$

بنابراین مجموع ریشه‌های این معادله برابر است با:

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۶

نکته: $\log_b a^n = n \log_b a$, $\log_a a = 1$

با جای گذاری $E = 10^{22/6}$ در رابطه $\log E = 11/8 + 1/5 M$ داریم:

$$\log 10^{22/6} = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow 22/6 = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow 1/5 M = 10/8 \Rightarrow M = \frac{10/8}{1/5} = \frac{10 \cdot 5}{8} = 5 \cdot 5/4 = 25/4$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۷

نکته: $(a^b)^c = a^{bc}$

نکته: با شرط $a > 0$ و $a \neq 1$: از معادله $a^x = a^y$ می‌توان نتیجه گرفت: $x = y$

ابتدا هریک از معادلات نمایی را حل می‌کنیم:

$$(1): (\sqrt{3})^{3x-3} = 27^{x+1} \Rightarrow 3^{\frac{3x-3}{2}} = 3^{3x+3} \Rightarrow \frac{3x-3}{2} = 3x+3 \Rightarrow 3x-3 = 6x+6 \Rightarrow x = -3$$

$$(2): \left(\frac{3}{5}\right)^{x+3} = \frac{25}{9} \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x+3} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} \Rightarrow x+3 = -2 \Rightarrow x = -5$$

$$-3 - (-5) = 2$$

پس اختلاف ریشه‌های این دو معادله نمایی برابر است با:

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۸

نکته: اگر $a > 0$ و $a \neq 1$ باشد، آنگاه: $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$

$$\frac{2^{x-2} + 2^{x+1} + 2^{x+2}}{5^x + 5^{x-1} + 5^{x+1}} = \frac{\frac{2^x}{2^2} + 2^x \times 2 + 2^x \times 2^2}{5^x + \frac{5^x}{5} + 5^x \times 5^1} = \frac{2}{31} \Rightarrow \frac{2^x \left(\frac{1}{4} + 2 + 4\right)}{5^x \left(1 + \frac{1}{5} + 5\right)} = \frac{2}{31} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x \left(\frac{\frac{25}{4}}{\frac{31}{5}}\right) = \frac{2}{31}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x \left(\frac{125}{124}\right) = \frac{2}{31} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{2}{31} \times \frac{124}{125} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{8}{125} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \Rightarrow x = 3$$

$$A = (\sqrt[3]{x+1})^{x^2-2} \xrightarrow{x=3} A = (\sqrt[3]{4})^6 = 4^2 \Rightarrow A = 16$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۹

نکته: معادله‌ای را که در آن متغیر در توان قرار گرفته باشد، معادله نمایی می‌نامند. برای حل معادلات نمایی از خاصیت یک‌به‌یک بودن تابع نمایی استفاده می‌کنیم. اگر a یک عدد حقیقی مثبت مخالف ۱ باشد و داشته باشیم $a^x = a^y$ ، آنگاه $x = y$ و برعکس.

با توجه به اینکه $\frac{2}{25} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ داریم:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{6x-x^2} = \left(\frac{9}{4}\right)^{x-1} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{6x-x^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2(x-1)}$$

$$\Rightarrow 6x - x^2 = -2x + 2 \Rightarrow x^2 - 8x + 2 = 0$$

اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 8x + 2 = 0$ باشند، آنگاه:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 8 \\ \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha \cdot \beta} = \frac{8}{2} = 4$$

بنابراین:

$$\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)^2 = \log_{\frac{2}{3}} 4^2 = 2$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۰

نکته: برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c و $(c \neq 1)$ داریم: $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$

نکته: اگر $a, b > 0$ و $a \neq 1$ ، آنگاه: $\log_a b^n = \frac{n}{m} \log_a b$

نکته: اگر $a, b, c > 0$ و $a, c \neq 1$ ، آنگاه: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

راه حل اول:

$$\log_8 12 = a \Rightarrow \frac{\log_{\frac{2}{3}} 12}{\log_{\frac{2}{3}} 8} = \frac{\log_{\frac{2}{3}} (4 \times 3)}{\log_{\frac{2}{3}} 2^3} = \frac{\log_{\frac{2}{3}} 4 + \log_{\frac{2}{3}} 3}{\frac{3}{2} \log_{\frac{2}{3}} 2} = \frac{1 + \log_{\frac{2}{3}} 3}{\frac{3}{2}} = a$$

$$\Rightarrow 1 + \log_{\frac{2}{3}} 3 = \frac{3}{2} a \Rightarrow \log_{\frac{2}{3}} 3 = \frac{3}{2} a - 1 \quad (*)$$

اکنون داریم:

$$\log_{\frac{2}{3}} 36 = \log_{\frac{2}{3}} 4 \times 3^2 = \log_{\frac{2}{3}} 4 + 2 \log_{\frac{2}{3}} 3 \stackrel{(*)}{=} 1 + 2\left(\frac{3}{2} a - 1\right) = 3a - 1$$

راه حل دوم:

$$\log_8 12 = a \Rightarrow \log_8 3 + \log_8 4 = \log_{\frac{2}{3}} 3 + \log_{\frac{2}{3}} 2^2 = a \Rightarrow \frac{1}{3} \log_{\frac{2}{3}} 3 = a - \frac{2}{3} \Rightarrow \log_{\frac{2}{3}} 3 = 3a - 2$$

$$\log_{\frac{2}{3}} 36 = \log_{\frac{2}{3}} 6^2 = \log_{\frac{2}{3}} 6 = \log_{\frac{2}{3}} 3 + \log_{\frac{2}{3}} 2 = 3a - 2 + 1 = 3a - 1$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۱

نکته: اگر $[u] = k$ و $k \in \mathbb{Z}$ ، آنگاه:

$$k \leq u < k+1$$

نکته: اگر $a, b > 0$ و $a \neq 1$ ، آنگاه:

$$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$$

نکته: اگر $x, y, a > 0$ و $a \neq 1$ ، آنگاه:

$$\log_a x \leq \log_a y \Rightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \Rightarrow x \geq y \\ a > 1 \Rightarrow x \leq y \end{cases}$$

عبارت $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ ، بازشده عبارت $(x-2)^3$ است.از طرفی $3\sqrt{3}$ یا همان $\sqrt{3^3} = \sqrt{27}$ هم $3^{\frac{3}{2}}$ است، پس ساده شده عبارت داخل جزء صحیح به صورت زیر است:

$$\log_{3\sqrt{3}} (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) = \log_{3^{\frac{3}{2}}} (x-2)^3 = \frac{\frac{3}{2}}{3} \log_3 (x-2) = \frac{1}{2} \log_3 (x-2)$$

پس:

$$\left[\log_{3\sqrt{3}} (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) \right] = 2 \Rightarrow \left[\frac{1}{2} \log_3 (x-2) \right] = 2 \Rightarrow 2 \leq \frac{1}{2} \log_3 (x-2) < 3 \xrightarrow{\times 2}$$

$$4 \leq \log_3 (x-2) < 6 \Rightarrow \log_3 3 \leq \log_3 (x-2) < \log_3 3^6 \xrightarrow{x-2>0} 3 \leq x-2 < 3^6 \Rightarrow 3 \leq x-2 < \sqrt{27}$$

$$\xrightarrow{+2} 5 \leq x < \underbrace{\sqrt{27} + 2}_{=5/2} \Rightarrow 5 \leq x < 7/2$$

پس مقادیر صحیح ممکن برای x برابر است با:

$$\{5, 6, 7\}$$

و مجموع این سه مقدار برابر است با:

$$5 + 6 + 7 = 18$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: به طور کلی اگر a یک عدد حقیقی مثبت ($a \neq 1$) باشد، آنگاه با توجه به یک به یک بودن تابع لگاریتمی، از تساوی $\log_a x = \log_a y$ می توان نتیجه گرفت $x = y$ و به عکس، اگر $x = y$ ، آنگاه: $\log_a x = \log_a y$.نکته: $\log_a b^n = n \log_a b$; $b, a > 0$, $a \neq 1$

$$\log_7 (x^2 + 10x) = 3 + \log_7 (x+3) \Rightarrow \log_7 (x^2 + 10x) = \log_7 8 + \log_7 (x+3)$$

$$\Rightarrow \log_7 (x^2 + 10x) = \log_7 (8x + 24) \Rightarrow x^2 + 10x = 8x + 24 \Rightarrow x^2 + 2x - 24 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+6) = 0$$

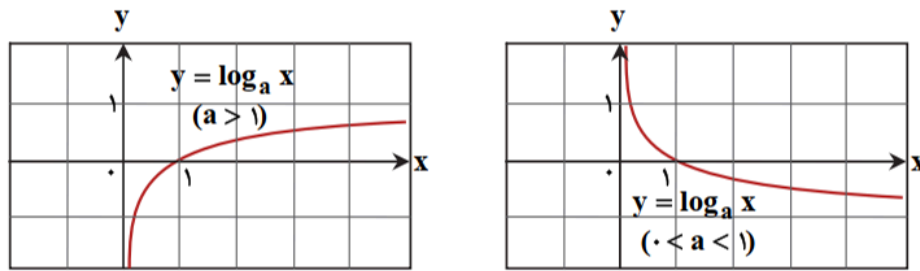
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \Rightarrow \alpha = 4 \\ x = -6 \text{ غ ق} \end{cases}$$

بنابراین:

$$\log_7 (\alpha^2 + 4\alpha) = \log_7 (16 + 16) = \log_7 32 = 5$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: نمودار تابع لگاریتمی در حالت کلی مشابه نمودارهای زیر است:



با توجه به نمودار، دامنه تابع f بازه $(-\infty, 4)$ است، پس $x = 4$ ، ریشه معادله $bx + 8 = 0$ است:

$$x = 4 \Rightarrow 4b + 8 = 0 \Rightarrow b = -2$$

از طرفی $f(-4) = 0$ ، بنابراین:

$$f(x) = a - \log_7(-2x + 8) \Rightarrow a - \log_7 16 = 0 \Rightarrow a = \log_7 16 \Rightarrow a = 4$$

پس ضابطه تابع به صورت $f(x) = 4 - \log_7(-2x + 8)$ (*) است.

خواسته سؤال $f^{-1}(a - 2b)$ است، بنابراین:

$$a = 4, b = -2 \Rightarrow f^{-1}(a - 2b) = f^{-1}(8)$$

$$f^{-1}(8) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = 8 \xrightarrow{(*)} 4 - \log_7(-2\alpha + 8) = 8 \Rightarrow \log_7(-2\alpha + 8) = -4$$

$$\Rightarrow -2\alpha + 8 = 7^{-4} \Rightarrow -2\alpha + 8 = \frac{1}{16} \Rightarrow -2\alpha = \frac{-127}{16} \Rightarrow \alpha = \frac{127}{32}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: برای اعداد حقیقی و مثبت a, b و $c (c \neq 1)$ ، داریم:

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

نکته: اگر $a, b > 0$ و $a \neq 1$ ، آنگاه:

$$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$$

نکته: اگر $b = \frac{a+c}{2}$ ، آنگاه b را واسطه حسابی a و c می‌گوییم.

به طرفین فرض سؤال $12ab$ را اضافه می‌کنیم:

$$4a^2 + 9b^2 = 4ab \Rightarrow 4a^2 + 9b^2 + 12ab = 4ab + 12ab$$

$$(2a + 3b)^2 = 16ab \Rightarrow \left(\frac{2a+3b}{4}\right)^2 = ab$$

اکنون از طرفین رابطه به دست آمده لگاریتم می‌گیریم و داریم:

$$\log\left(\frac{2a+3b}{4}\right)^2 = \log ab \Rightarrow 2 \log \frac{2a+3b}{4} = \log a + \log b \Rightarrow \log \frac{2a+3b}{4} = \frac{\log a + \log b}{2}$$

پس $\log \frac{2a+3b}{4}$ ، واسطه حسابی بین $\log a$ و $\log b$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: اگر $a, b > 0$ و $a, b \neq 1$ ، آنگاه: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

نکته: اگر $a, b > 0$ و $a \neq 1$ ، آنگاه: $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$

ابتدا هر دو عبارت لگاریتمی را ساده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \log_x 16 = \log_x 2^4 = 4 \log_x 2 \\ \log_{\sqrt[3]{4}} x^2 = \log_{\frac{2}{2^3}} x^2 = \frac{2}{\frac{2}{3}} \log_2 x = 3 \log_2 x \end{cases}$$

پس معادله داده‌شده به‌صورت روبه‌رو خواهد بود:

$$\log_x 16 + \log_{\sqrt[3]{4}} x^2 = 8 \Rightarrow 4 \log_x 2 + 3 \log_2 x = 8$$

با فرض $\log_x 2 = t$ ، داریم $\log_2 x = \frac{1}{t}$. حال معادله را برحسب t می‌نویسیم و داریم:

$$4t + 3\left(\frac{1}{t}\right) = 8 \xrightarrow{\times t} 4t^2 - 8t + 3 = 0 \xrightarrow{\Delta=16} t = \frac{8 \pm 4}{8} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{3}{2} \\ t_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

پس:

$$\begin{cases} \log_x 2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x^{\frac{3}{2}} = 2 \Rightarrow x_1 = 2^{\frac{2}{3}} \\ \log_x 2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow x_2 = 4 = 2^2 \end{cases}$$

مقادیر x_1 و x_2 را در تساوی $x_1 x_2 = 8^a$ ، قرار می‌دهیم:

$$2^{\frac{2}{3}} \times 2^2 = 8^a \Rightarrow 2^{\left(\frac{2}{3}+2\right)} = 2^{3a} \Rightarrow 2^{\frac{8}{3}} = 2^{3a} \Rightarrow \frac{8}{3} = 3a \Rightarrow a = \frac{8}{9}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: $\log_a b^n = n \log_a b$ ($b, a > 0$, $a \neq 1$)

نکته: $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$ ($b, a > 0$, $a \neq 1$)

نکته: برای اعداد حقیقی و مثبت a, b و c ($c \neq 1$)، داریم:

$$\log_c \left(\frac{a}{b} \right) = \log_c a - \log_c b$$

ضابطه تابع داده شده را ساده می کنیم:

$$y = \log_9 (\underbrace{x^2 + x^2 + 2x^2}_{\text{اتحاد مربع دو جمله ای}}) - \log_{27} x^3 \Rightarrow y = \log_{3^2} (x^2 + x)^2 - \log_{3^3} x^3$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{2} \log_3 (x^2 + x) - \frac{3}{3} \log_3 x = \log_3 (x^2 + x) - \log_3 x = \log_3 \frac{x^2 + x}{x} = \log_3 (x + 1)$$

اکنون ضابطه وارون را به دست می آوریم:

$$y = \log_3 (x + 1) \xrightarrow[\text{نمایی}]{\text{تبدیل به}} 3^y = x + 1 \Rightarrow x = 3^y - 1 \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = 3^x - 1$$

با مقایسه $y = 3^{ax+b} + c$ و $y = 3^x - 1$ ، نتیجه می گیریم:

$$a = 1, b = 0, c = -1$$

پس:

$$\frac{4a + 2b}{2c} = -2$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته : $b^a = c \Leftrightarrow \log_b c = a$; ($c > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$)

نکته : $\log_a b^n = n \log_a b$; ($b, a > 0$, $a \neq 1$)

از دو طرف تساوی $x^{3+2\log_2 x} = 32$ ، لگاریتم در مبنای ۲ می‌گیریم:

$$\log_2 x^{3+2\log_2 x} = \log_2 32$$

اکنون داریم:

$$(3 + 2\log_2 x)(\log_2 x) = \log_2 2^5 = 5$$

حال با فرض $\log_2 x = t$ ، معادله را حل می‌کنیم:

$$(3 + 2t)(t) = 5 \Rightarrow 2t^2 + 3t - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\log_2 x = t \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \Rightarrow x_1 = 2^1 = 2 \\ \log_2 x = -\frac{5}{2} \Rightarrow x_2 = 2^{-\frac{5}{2}} \end{cases}$$

$$x_1 > x_2 \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{2}{2^{-\frac{5}{2}}} = 2^{\frac{7}{2}} = \sqrt{2^7} = 8\sqrt{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته : $a = b^x \Leftrightarrow \log_b a = x$ ($a, b > 0$, $b \neq 1$)

نکته : $\log_b a^n = n \log_b a$

$$(2^2)^{x+1} + 2^{2x+3} = 60 \Rightarrow 2^{2x+2} + 2^{2x+3} = 60 \Rightarrow 4 \times 2^{2x} + 8 \times 2^{2x} = 60 \Rightarrow 12 \times 2^{2x} = 60 \Rightarrow 2^{2x} = 5 \Rightarrow 2x = \log_2 5$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \log_2 5 = \log_2 \sqrt{5}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته : $\log_c a = b \Leftrightarrow a = c^b \quad (a, c > 0, c \neq 1)$

نکته : $\log_{b^m} a^n = \frac{n}{m} \log_b a \quad (a, b > 0, b \neq 1)$

نکته : $\log_c a - \log_c b = \log_c \left(\frac{a}{b}\right) \quad (a, b, c > 0, c \neq 1)$

نکته : $a^{\log_a b} = b \quad (a, b > 0, a \neq 1)$

با توجه به نکات بالا داریم:

$$\log_7 (x^2 + 2x - 7) - \log_7 (x + 1) = 1 \Rightarrow \log_7 \left(\frac{x^2 + 2x - 7}{x + 1} \right) = 1 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x - 7}{x + 1} = 7$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 7 = 7x + 7 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

با توجه به اینکه به ازای $x = -3$ ، عبارت جلوی لگاریتم‌ها منفی می‌شود و اعداد منفی لگاریتم ندارند، پس $x = -3$ غیرقابل قبول است و $x = 3$ جواب معادله است. حال مقدار خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$x^{\log_9 (x+1)} = 3^{\log_9 4} = 3^{\log_3 2^2} = 3^{\frac{2}{2} \log_3 2} = 3^{\log_3 2} = 2$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته ۱: برای اعداد حقیقی و مثبت a, b و c ($c \neq 1$) داریم: $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$

نکته ۲: برای اعداد حقیقی و مثبت a, b و c ($c \neq 1$) داریم: $\log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$

نکته ۳: اگر a و b اعدادی حقیقی و مثبت و $a \neq 1$ ، داریم: $\log_a b^n = n \log_a b$

نکته ۴: $(a, b, c > 0, b, c \neq 1) \quad \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

ابتدا معادله را ساده کرده و سپس آن را حل می‌کنیم:

$$((\log 5)^2 - (\log 2)^2) \log_{\Delta} (\Delta x + 6) = 4 \Rightarrow (\log 5 - \log 2)(\log 5 + \log 2) \log_{\Delta} (\Delta x + 6) = 4$$

$$\Rightarrow \log \frac{5}{2} \times \log (5 \times 2) \times \log_{\Delta} (\Delta x + 6) = 4 \Rightarrow \log 5^2 \times \log 10^2 \times \log_{\Delta} (\Delta x + 6) = 4 \Rightarrow 2 \log 5 \times 2 \times \log_{\Delta} (\Delta x + 6) = 4$$

$$\Rightarrow \log 5 \times \frac{\log (\Delta x + 6)}{\log \Delta} = 1 \Rightarrow \log (\Delta x + 6) = 1 \Rightarrow \Delta x + 6 = 10 \Rightarrow \Delta x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{\Delta} \Rightarrow x = 0.8$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: $a^b = c \Leftrightarrow \log_a c = b \quad (a, c > 0, a \neq 1)$

نکته: $\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \quad (a, b > 0, a, b \neq 1)$

نکته: $\log_a b^n = n \log_a b \quad (a, b > 0, a \neq 1)$

نکته: $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \quad (a, b, c > 0, a \neq 1)$

تعداد باکتری‌ها پس از t ساعت، از رابطه $f(t) = 100 \times 2^{\frac{t}{5}}$ به دست می‌آید، پس:

$$f(t) = 500 \Rightarrow 100 \times 2^{\frac{t}{5}} = 500 \Rightarrow 2^{\frac{t}{5}} = 5 \Rightarrow \frac{t}{5} = \log_2 5 \Rightarrow t = \log_2 (100) \Rightarrow t = \log_2 100 - \log_2 2$$

$$\Rightarrow t = 2 \log_2 10 - 1 \Rightarrow t = \frac{2}{\log 2} - 1 \Rightarrow t = \frac{2}{0.3} - 1 \Rightarrow t = \frac{17}{3} \Rightarrow t = 5 \frac{2}{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: دامنه تابع لگاریتمی $y = \log_a g(x)$ ، جواب نامعادله $g(x) > 0$ است.

دامنه تابع f با توجه به نمودار بازه $D = (-\infty, 1)$ است، پس عبارت داخل لگاریتم، یعنی $ax + b$ به ازای $x = 1$ برابر صفر است:

$$a \times 1 + b = 0 \Rightarrow b = -a$$

همچنین نمودار تابع f محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع کرده است، یعنی $f(0) = 1$ ، پس داریم:

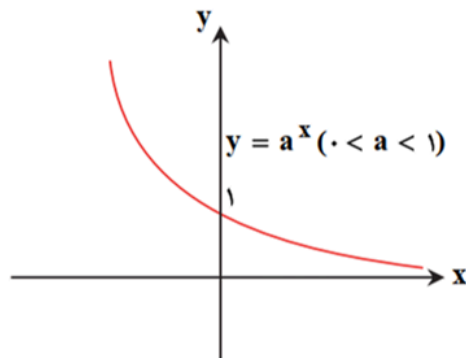
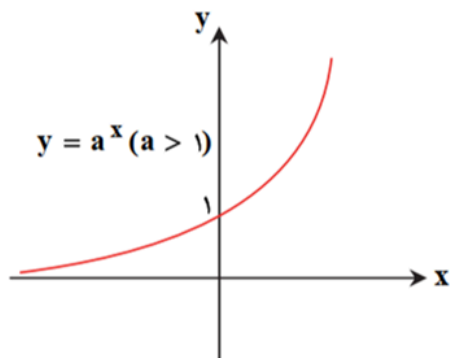
$$f(0) = 1 \Rightarrow 1 = \log_c (0 + b) \Rightarrow b = c^1$$

بنابراین $b = c = -a$ ، یعنی تابع f به صورت $f(x) = \log_{(-a)}(ax - a)$ می‌باشد و داریم:

$$f(a + 1) = \log_{(-a)}(a(a + 1) - a) = \log_{(-a)}(a^2 + a - a) = \log_{(-a)} a^2 = \log_{(-a)} (-a)^2 = 2$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: نمودار توابع نمایی در حالت کلی، مشابه نمودارهای زیر است:



نکته: $(a, b) \in f \Rightarrow (b, a) \in f^{-1}$

نکته: $D_{f^{-1}} = R_f, R_{f^{-1}} = D_f$

با توجه به شکل که نمودار f^{-1} است، داریم:

$$f^{-1}(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow a + 2^b = 0 \Rightarrow 2^b = -a \quad (1)$$

از طرفی $D_{f^{-1}} = (-2, +\infty)$ پس برد تابع f نیز بازه $(-2, +\infty)$ است:

$$2^{b+x} > 0, a + 2^{b+x} > -2$$

$$\Rightarrow a = -2 \xrightarrow{(1)} 2^b = 2 \Rightarrow b = 1$$

با توجه به مقادیر به دست آمده برای a و b داریم:

$$f(x) = -2 + 2^{1+x}$$

خواسته سؤال، $f^{-1}(-b)$ یعنی همان $f^{-1}(-1)$ است. با فرض $f^{-1}(-1) = \alpha$ ، داریم:

$$f^{-1}(-1) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = -1 \Rightarrow -2 + 2^{1+\alpha} = -1$$

$$\Rightarrow 2^{1+\alpha} = 1 \Rightarrow 1 + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -1 \Rightarrow f^{-1}(-1) = -1$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: اگر $a \neq 1$ و $a, b > 0$ ، آنگاه: $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$.

نکته: اگر $a \neq 1$ و $a, b, c > 0$ ، آنگاه: $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

نکته: اگر $a, b \neq 1$ و $a, b > 0$ ، آنگاه: $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$.

$$\log_7 \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = \log_7 \sqrt{(2x+1)^2} = \log_7 |2x+1| \quad \text{ابتدا داریم:}$$

$$\log_7 |2x+1| = 1 + 2 \log_{2x+1} 2 \xrightarrow[2x+1 \neq 1]{2x+1 > 0} \log_7 (2x+1) = 1 + 2 \log_{2x+1} 2 \quad \text{اکنون داریم:}$$

با فرض $\log_7 (2x+1) = A$ داریم:

$$A = 1 + \frac{2}{A} \xrightarrow{\times A} A^2 = A + 2 \Rightarrow A^2 - A - 2 = 0.$$

$$\Rightarrow (A+1)(A-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \Rightarrow \log_7 (2x+1) = -1 \Rightarrow 2x+1 = \frac{1}{7} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{7} \\ A = 2 \Rightarrow \log_7 (2x+1) = 2 \Rightarrow 2x+1 = 49 \Rightarrow x_2 = \frac{48}{2} \end{cases}$$

حال با توجه به فرض سؤال داریم:

$$\alpha = x_1 + x_2 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{7} + \frac{48}{2} = \frac{5}{2}$$

بنابراین خواسته مسئله برابر است با:

$$\log_7 \alpha = \log_7 \frac{5}{2} = \log_7 \frac{10}{4} = \log_7 10 - \log_7 4 = \log_7 10 - 2$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: نمودار تابع f و تابع وارون آن نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه‌اند.

$$a^b = c \Leftrightarrow \log_a c = b \quad (a, c > 0, a \neq 1)$$

$$\text{نکته: } \log_a b + \log_a c = \log_a bc \quad (a, b, c > 0, a \neq 1)$$

ابتدا تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{9^x + 3^{x+1} - 10}{3^x + 5} = \frac{(3^x)^2 + 3 \times 3^x - 10}{3^x + 5} = \frac{(3^x + 5)(3^x - 2)}{3^x + 5} = 3^x - 2$$

با توجه به این که $3^x + 5 \neq 0$ ، پس $D_f = \mathbb{R}$ است.

اکنون وارون تابع f را به دست می‌آوریم:

$$y = 3^x - 2 \Rightarrow y + 2 = 3^x \Rightarrow \log_3(y + 2) = x$$

$$\Rightarrow y = \log_3(x + 2) \Rightarrow g(x) = \log_3(x + 2)$$

حال داریم:

$$g(x - 5) = \log_3(x - 5 + 2) = \log_3(x - 3)$$

اکنون معادله داده شده را حل می‌کنیم:

$$\log_3(x - 3) = 1 - \log_3(x^2 + 3x + 9)$$

$$\Rightarrow \log_3(x - 3) + \log_3(x^2 + 3x + 9) = 1$$

$$\Rightarrow \log_3(x^3 - 27) = 1 \Rightarrow x^3 - 27 = 3^1$$

$$\Rightarrow x^3 = 30 \Rightarrow x = \sqrt[3]{30} \quad \checkmark$$

پس جواب معادله در بازه $(3, 4)$ است، بنابراین گزینه ۴ درست است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$\text{نکته: } \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \quad (a, b, c > 0, a \neq 1)$$

$$\text{نکته: } \log_a b^n = n \log_a b \quad (a, b > 0, a \neq 1)$$

$$\text{نکته: } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (a, b, c > 0, a, c \neq 1)$$

$$\text{نکته: } \log_a b = m \Rightarrow \log_b a = \frac{1}{m} \quad (a, b > 0, a, b \neq 1)$$

این عنصر هر هفته ۱۰ درصد جرم خود را از دست می‌دهد، پس بعد از n هفته، جرم باقی‌مانده آن برابر با $(0.9)^n$ جرم اولیه (m_0) است؛ بنابراین:

$$\begin{aligned} \text{جرم باقی‌مانده پس از } n \text{ هفته} &= (0.9)^n \times m_0 \Rightarrow \frac{1}{5} m_0 = (0.9)^n \times m_0 \Rightarrow \frac{1}{5} = (0.9)^n \Rightarrow n = \log_{0.9} \frac{1}{5} = \frac{\log_3 \left(\frac{1}{5}\right)}{\log_3 0.9} \\ &\Rightarrow n = \frac{\log_3 1 - \log_3 5}{\log_3 9 - \log_3 10} = \frac{0 - \log_3 5}{2 \log_3 3 - \log_3 10} \end{aligned}$$

با توجه به معلومات مسئله داریم:

$$\log_3 5 \approx 1/46, \log_3 3 = 0/48$$

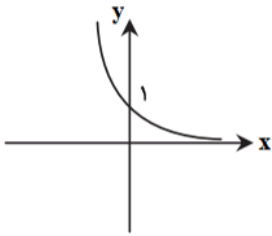
$$\Rightarrow \log_3 10 = \frac{1}{0/48} = \frac{100}{48} = \frac{25}{12}$$

پس داریم:

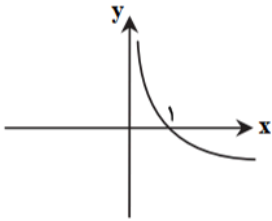
$$n = -\frac{1/46}{2 - \frac{25}{12}} = \frac{1/46}{\frac{1}{12}} = 12/52$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: نمودار تابع نمایی $y = a^x$ با شرط $0 < a < 1$ به صورت روبه‌رو است:



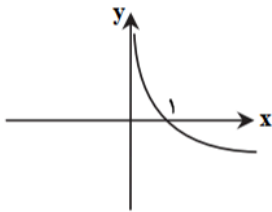
نکته: نمودار تابع لگاریتمی $y = \log_a x$ با شرط $0 < a < 1$ به صورت روبه‌رو است:



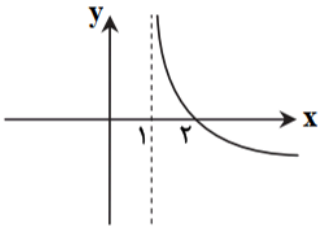
نکته: اگر $k > 0$ ، برای رسم $y = f(x - k)$ باید نمودار $y = f(x)$ را در راستای افقی به اندازه k واحد به راست منتقل کنیم.

با توجه به نکات بالا داریم: $y = (2m - 1)^x \Rightarrow 0 < 2m - 1 < 1 \Rightarrow 1 < 2m < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < m < 1$

بنابراین نمودار $y = \log_m x$ به صورت روبه‌رو است:



اکنون باید نمودار بالا را یک واحد به راست منتقل کنیم:



بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: $a^b = c \Leftrightarrow \log_a c = b \quad (c, a > 0, a \neq 1)$

نکته: $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c} \quad (a, b, c > 0, a \neq 1)$

با توجه به نمودار داده‌شده داریم:

$$\left. \begin{aligned} f(2/1) &= 0 \Rightarrow a + \log_{\frac{1}{2}}(2/1b + c) = 0 \\ f(0) &= -3 \Rightarrow a + \log_{\frac{1}{2}} c = -3 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{-} \log_{\frac{1}{2}}(2/1b + c) - \log_{\frac{1}{2}} c = 3$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2/1b + c}{c}\right) = 3 \Rightarrow \frac{2/1b + c}{c} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8 \Rightarrow \frac{2/1b}{c} + \frac{c}{c} = 8 \Rightarrow \frac{2/1b}{c} = 7 \Rightarrow \frac{b}{c} = 7 \Rightarrow b = 7c$$

از طرفی $bx + c > 0$ و با توجه به نمودار و دامنه تابع، باید $b > 0$ باشد، زیرا دامنه تابع بازه $(-\frac{c}{b}, +\infty)$ است. بنابراین گزینه ۳ درست است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته : $a^b = c \Leftrightarrow \log_a c = b \quad (a, c > 0, a \neq 1)$

نکته : $\log_a b^n = n \log_a b \quad (a, b > 0, a \neq 1)$

نکته : $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \quad (a, b, c > 0, a \neq 1)$

نکته : $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (a, b, c > 0; a, c \neq 1)$

اگر جرم این عنصر m_0 باشد، پس از ۱۰ روز، $\frac{1}{9}$ جرم آن از بین می‌رود. یعنی $\frac{1}{9}$ جرم آن باقی مانده است، پس بعد از n دوره ۱۰ روزه، $\left(\frac{1}{9}\right)^n$ از جرم آن باقی می‌ماند؛ بنابراین داریم:

جرم باقی‌مانده $m = m_0 \left(\frac{1}{9}\right)^n$

قرار است ۰/۱ جرم اولیه عنصر باقی بماند؛ بنابراین:

$$0.1 m_0 = m_0 \left(\frac{1}{9}\right)^n \Rightarrow 0.1 = \left(\frac{1}{9}\right)^n \Rightarrow n = \log_{\frac{1}{9}} 0.1$$

پس کافی است مقدار $\log_{\frac{1}{9}} 0.1$ را به دست آوریم:

$$\log_{\frac{1}{9}} 0.1 = \frac{\log 0.1}{\log \frac{1}{9}} = \frac{\log 1 - \log 10}{\log 1 - \log 9} = \frac{0 - 1}{1 - 2 \log 3} = \frac{-1}{1 - 2 \log 3} = \frac{1}{2 \log 3 - 1} = \frac{1}{2(\log 3 - 0.5)} = \frac{1}{2 \times 0.51} = \frac{1}{1.02} \Rightarrow n = \frac{1}{1.02} \approx 19.6$$

پس بعد از گذشت ۱۹۶ = ۱۹/۶ × ۱۰ روز جرم عنصر ۰/۱ جرم اولیه‌اش است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

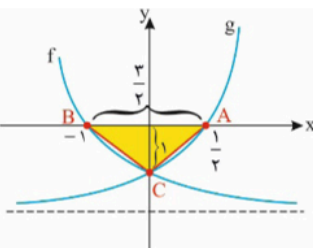
به طرفین رابطه $a^2 + 9b^2 = 10ab$ جمله $6ab$ را اضافه می‌کنیم:

$$a^2 + 6ab + 9b^2 = 10ab \Rightarrow (a + 3b)^2 = 10ab \Rightarrow a + 3b = \sqrt{10ab} \Rightarrow \log\left(\frac{a + 3b}{4}\right) = \log\frac{\sqrt{10ab}}{4} = \log\sqrt{ab} = \log(ab)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}(\log ab) = \frac{1}{2}(\log a + \log b) = \frac{\log a + \log b}{2}$$

بنابراین $\log\left(\frac{a + 3b}{4}\right)$ واسطه حسابی دو جمله $\log a$ و $\log b$ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)



با توجه به تعریف تابع نمایی مشخص است که تابع $f(x)$ اکیدا نزولی و تابع $g(x)$ اکیدا صعودی است.

$$f(0) = g(0) \rightarrow 1 + b = 1 + c \rightarrow b = c$$

$$f(-1) = 0 \rightarrow b = -2 = c$$

$$g(x) = 4^x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow A\left(\frac{1}{2}, 0\right), B(-1, 0)$$

$$g(0) = 4^0 - 2 = -1 \rightarrow C(0, -1)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \times 1}{2} = \frac{3}{4}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۲

از معادله $x^2 + 15x + 47 = 9y^2$ با فرض طبیعی بودن x و y نتیجه می‌گیریم که چون $9y^2$ مربع کامل است پس $x^2 + 15x + 47$ هم مربع کامل است. از طرفی داریم:

$$\underbrace{x^2 + 14x + 49}_{(x+7)^2} \leq \underbrace{x^2 + 15x + 47}_{(3y)^2} < \underbrace{x^2 + 16x + 64}_{(x+8)^2}$$

پس تنها راه این است که $3y = x + 7$ باشد و داریم:

$$x^2 + 15x + 47 = x^2 + 14x + 49 = (x+7) \Rightarrow x = 2, y = 3$$

$$\log_x(y+1) = \log_2 4 = 2$$

و در نتیجه:

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$D_{\text{fog}} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

برای دامنه fog داریم:

$$D_g = [2, 4]$$

پس داریم:

$$D_f : x^2 - 2x > 0 \Rightarrow x < 0 \text{ یا } x > 2$$

$$1) x \in [-2, 4]$$

$$2) g(x) \in D_f \Rightarrow g(x) > 2$$

با توجه به اینکه تابع g در هر قسمت خطی است، نتیجه می‌گیریم $g(\frac{1}{2}) = 2$ و $g(\frac{3}{2}) = 2$ است، بنابراین $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$.

حال با اشتراک گرفتن از بازه‌های به دست آمده، به بازه $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ می‌رسیم. خواسته سؤال را حساب می‌کنیم:

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۴

از تغییرمتغیر $a^x = t > 0$ استفاده کرده و تبدیل به معادله درجه دوم می‌کنیم:

$$t + \frac{27}{t} - 12 = 0 \xrightarrow{\times t} t^2 - 12t + 27 = 0 \rightarrow (t-9)(t-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 9 = a^{x_1} \rightarrow x_1 = \log_a^9 \\ t_2 = 3 = a^{x_2} \rightarrow x_2 = \log_a^3 \end{cases}$$

با استفاده از مجموع ریشه‌های این معادله a به دست می‌آید:

$$x_1 + x_2 = \log_a^9 + \log_a^3 = \log_a^{27} = -3$$

با استفاده از نکته $\log_m^x = y \rightarrow x = m^y$ خواهیم داشت:

$$27 = a^{-3} = \left(\frac{1}{a}\right)^3 \rightarrow \frac{1}{a^3} = 27 \rightarrow a^3 = \frac{1}{27} \rightarrow a = \frac{1}{3}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۲ - متوسط)

۶۵

طبق فرض $f^{-1}(56) = 2$ در نتیجه $f(2) = 56$.

با جایگذاری $x = 2$ در ضابطه $f(x)$ داریم:

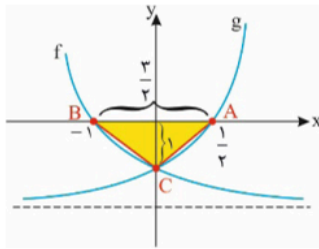
$$f(2) = 2^{\log_a^2} + 4^{\log_a^2} = 4^{\log_a^2} + 4^{\log_a^2} = a^{\log_a^4} + a^{\log_a^4} = a + a^2 \Rightarrow f(2) = a + a^2 = 56 \Rightarrow a^2 + a - 56 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -8 \\ a = 7 \end{cases}$$

$a = -8$ غیر قابل قبول است زیرا در دامنه $\log_x^a$ قرار ندارد.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۲ - متوسط)

۶۶

با توجه به تعریف تابع نمایی مشخص است که تابع $f(x)$ اکیدا نزولی و تابع $g(x)$ اکیدا صعودی است.



$$f(0) = g(0) \rightarrow 1 + b = 1 + c \rightarrow b = c$$

$$f(-1) = 0 \rightarrow b = -2 = c$$

$$g(x) = 4^x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow A\left(\frac{1}{2}, 0\right), B(-1, 0)$$

$$g(0) = 4^0 - 2 = -1 \rightarrow C(0, -1)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \times 1}{2} = \frac{3}{4}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۷

به طرفین رابطه $a^2 + 9b^2 = 10ab$ جمله $6ab$ را اضافه می‌کنیم:

$$a^2 + 6ab + 9b^2 = 10ab \Rightarrow (a + 3b)^2 = 10ab \Rightarrow a + 3b = \sqrt{10ab} \Rightarrow \log\left(\frac{a + 3b}{4}\right) = \log\frac{\sqrt{10ab}}{4} = \log\sqrt{ab} = \log(ab)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}(\log ab) = \frac{1}{2}(\log a + \log b) = \frac{\log a + \log b}{2}$$

بنابراین $\log\left(\frac{a + 3b}{4}\right)$ واسطه حسابی دو جمله $\log a$ و $\log b$ است.

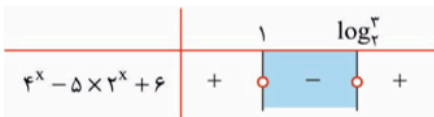
(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۸

ابتدا عبارت $4^x - 5 \times 2^x + 6$ را تجزیه و سپس ریشه‌های آن را به دست می‌آوریم و در نهایت تعیین علامت خواهیم کرد:

$$(2^x)^2 - 5 \times 2^x + 6 \leq 0 \rightarrow (2^x - 3)(2^x - 2) \leq 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2^x - 3 = 0 \rightarrow x = \log_2 3 \\ 2^x - 2 = 0 \rightarrow x = \log_2 2 = 1 \end{cases}$$



پس جواب ما بازه $[1, \log_2 3]$ خواهد بود.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۹

سرنخ

دقت به این نکته $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ کلید حل مسئله است.تک پله: اگر ریشه‌های معادله را α و β فرض کنیم، مجموع مربعات ریشه‌ها برابر است با:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P$$

حال مقادیر S و P را پیدا کرده و جایگذاری می‌کنیم پس:

$$S = \frac{-b}{a} = \sqrt[3]{\sqrt{3^2 \log_3^{169}} - 21} = \sqrt[3]{\sqrt{9 \log_3^{169}} - 21}$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt{169 \log_3^4} - 21} = \sqrt[3]{13 - 21} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$P = \frac{c}{a} = -4$$

$$S^2 - 2P = (-2)^2 - 2(-4) = 12$$

در نتیجه داریم:

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۰

سرنخ

از تغییر مبنا استفاده کنید و لگاریتم‌ها را به مبنای ۵ ببرید.

تک پله: می‌دانیم $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$ ، پس با توجه به اینکه $\log_5^{\frac{1}{y}} = \frac{1}{y}$ است، نتیجه می‌گیریم $\log_5^y = y$ می‌باشد. حال با استفاده از قاعدهتغییر مبنا، $\log_{13}^{100}$ را به مبنای ۵ می‌بریم:

$$\log_{13}^{100} = \frac{\log_5^{100}}{\log_5^{13}} = \frac{\log_5^{2^2 \times 5^2}}{\log_5^{3^2 \times 5}} = \frac{\log_5^{2^2} + \log_5^{5^2}}{\log_5^{3^2} + \log_5^5} = \frac{2\log_5^2 + 2\log_5^5}{3\log_5^3 + 1} = \frac{2y + 2}{3x + 1}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۱

پله اول: طبق گفته سوال داریم:

$$\frac{2}{\log_7^a} = \frac{4}{\log_7^b} = \frac{6}{\log_7^c} \rightarrow \frac{\log_7^a}{2} = \frac{\log_7^b}{4} = \frac{\log_7^c}{6} = m$$

$$\begin{cases} \log_7^a = 2m \rightarrow a = 7^{2m} \\ \log_7^b = 4m \rightarrow b = 7^{4m} \\ \log_7^c = 6m \rightarrow c = 7^{6m} \end{cases}$$

$$abc = 64 \rightarrow 7^{2m} \times 7^{4m} \times 7^{6m} = 64 \rightarrow 7^{12m} = 2^6 \rightarrow 12m = 6 \rightarrow m = \frac{1}{2}$$

پله دوم: بنابراین حاصل عبارت $\log_7^a \times \log_7^b \times \log_7^c$ برابر است با:

$$\log_7^a \times \log_7^b \times \log_7^c = 2m \times 4m \times 6m = 48m^3 = 48 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 6$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۲

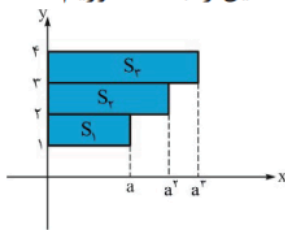
پله اول: چون یک رأس هر مستطیل روی نمودار تابع $f(x) = \log_a^x$ و یک ضلع آن روی محور y ها قرار دارد، با تلاقی قرار دادن تابع

$f(x)$ و y مربوطه، می توانیم x مربوطه به هر رأس مستطیل را بدست آوریم:

$$\log_a^x = 1 \Rightarrow x = a$$

$$\log_a^x = 2 \Rightarrow x = a^2$$

$$\log_a^x = 3 \Rightarrow x = a^3$$



$$S_3 = 3 \cdot 0 + S_1 \Rightarrow (a^3 \times 1) = 3 \cdot 0 + (a \times 1)$$

پله دوم:

$$\Rightarrow a^3 - a - 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow (a - 6)(a + 5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 6 \checkmark \\ a = -5 \text{ غ ق} \end{cases}$$

$$S_3 = a^3 \times 1 \Rightarrow S_3 = (6)^3 \Rightarrow S_3 = 216$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۳

پله اول: ابتدا طرفین وسطین می کنیم و عبارت را تا حد امکان ساده می کنیم:

$$\log_x^{(xy)} = \log_y^{(x\sqrt{y^5})} = \log_x^x + \log_x^y = \log_y^x + \log_y^{\sqrt{y^5}}$$

$$= 1 + \log_x^y = \log_y^x + \frac{5}{2} \rightarrow \log_x^y = \log_y^x + \frac{3}{2}$$

پله دوم: حال باید معادله را با فرض $t = \log_x^y$ حل کنیم تا مقادیر آن به دست آید بنابراین داریم:

$$t = \frac{1}{t} + \frac{3}{2} \xrightarrow{\times(t)} t^2 - \frac{3}{2}t - 1 = 0$$

$$\Delta = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 4(1)(-1) = \frac{25}{4} \rightarrow t_{1,2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}}{2}$$

$$t_1 = \frac{\frac{3}{2} + \frac{5}{2}}{2} = 2 \Rightarrow \log_x^y = 2 \rightarrow y = x^2$$

$$t_2 = \frac{\frac{3}{2} - \frac{5}{2}}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \log_x^y = -\frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow y\sqrt{x} = 1$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

به جای x عبارت $\log_{10} x$ قرار داده و از ویژگی‌های لگاریتم استفاده کنید.

سرنخ

۷۴

تک‌پله:

$$x + \log(\Delta^x - 2) = x \log 2 + \log 24$$

$$\log_{10} x + \log(\Delta^x - 2) = \log 2^x + \log 24$$

$$\log_{10} x (\Delta^x - 2) = \log(2^x \times 24) \rightarrow 10^x (\Delta^x - 2) = 2^x \times 24$$

$$\Delta^x (\Delta^x - 2) = 24 \xrightarrow{\Delta^x = t > 0} t(t - 2) = 24$$

$$\rightarrow t^2 - 2t - 24 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 6 \text{ ق.ق} \rightarrow t = \Delta^x = 6 \\ t = -4 < 0 \text{ غ.ق} \end{cases}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$S = \frac{1}{2} AC \times BC \times \sin 30^\circ$$

تک‌پله: می‌دانیم مساحت مثلث ABC با داشتن زاویه بین دو ضلع از رابطه زیر به دست می‌آید:

۷۵

حال داریم:

$$S = \frac{1}{2} \log_2 16 \times \log_2 27 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \log_2 2^4 \times \log_2 3^3$$

$$= \frac{4 \times 3}{4} \log_2 2 \times \log_2 3 = 3 \times \frac{\log 2}{\log 3} \times \frac{\log 3}{\log 2} = 3$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$a_{128} = a_{64+64} = a_{64} \cdot a_{64} = 8 \rightarrow a_{64} = 2^{\frac{3}{2}}$$

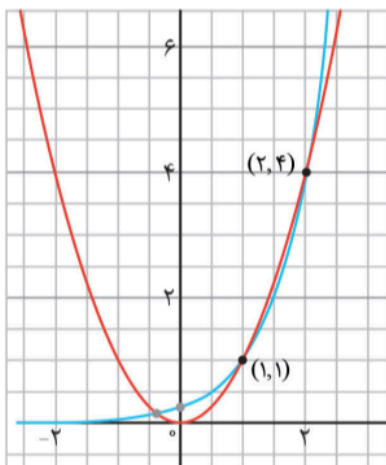
$$a_{64} = a_{32+32} = a_{32} \cdot a_{32} = 2^{\frac{3}{2}} \rightarrow a_{32} = 2^{\frac{3}{4}}$$

$$a_{32} = a_{16+16} = a_{16} \cdot a_{16} = 2^{\frac{3}{4}} \rightarrow a_{16} = 2^{\frac{3}{8}}$$

به همین ترتیب می‌توان حدس زد $a_1 = 2^{\frac{3}{128}}$ و حاصل $\log_2 a_1$ برابر $\frac{3}{128}$ است.

۷۶

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)



با توجه به نمودار $y = x^4 - 3x^2 + 2$ و $y = x^2$ داریم:

۷۷

$$-1 < x_1 < 0 \text{ و } x_2 = 1 \text{ و } x_3 = 2$$

پس معادله به صورت $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ است

و داریم:

$$x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2 - 2)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \text{ یا } 2 \Rightarrow x = \pm 1, \pm \sqrt{2}$$

مجموع مربعات ریشه‌ها برابر ۶ است.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۸

با توجه به نمودار f , k و $-k$ باید ریشه عبارت $ax^2 + bx + c$ باشد، بنابراین جمع ریشه‌ها برابر صفر است یعنی $b = 0$.

حال با جایگذاری نقاط داده شده در تابع f , مقادیر a و c را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} (-3, 0) \rightarrow f(-3) = \log_7(9a + c) = 0 &\Rightarrow 9a + c = 1 \\ (2, -3) \rightarrow f(2) = \log_7(4a + c) = -3 &\Rightarrow 4a + c = \frac{1}{8} \end{aligned} \Rightarrow a = \frac{7}{40}, c = \frac{-23}{40}$$

با توجه به نمودار $g(x)$, ضابطه تابع به صورت $y = k^x$, $0 < k < 1$ است، با توجه به گزینه‌ها تنها گزینه ۳ قابل قبول است.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۹

$$f(x) = a \cdot b^x + c \xrightarrow[c=-4]{\text{مطابق شکل}} f(x) = a \cdot b^x - 4$$

$$\begin{cases} f(0) = -2 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 4 = -2 \\ ab - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = 2 \Rightarrow f(x) = 2 \cdot 2^x - 4 = 2^{x+1} - 4$$

$$\text{نامعادله: } \frac{2^{x+1} - 18}{x + 2} < 0 \rightarrow \text{ریشه صورت: } 2^{x+1} - 18 = 0 \Rightarrow 2^x = 9 \Rightarrow x = \log_2 9 = 2 \log_2 3$$

$$\begin{array}{c|cccc} & -2 & & 2 \log_2 3 & \\ + & | & - & \bullet & + \end{array} \Rightarrow \text{جواب: } (-2, 2 \log_2 3)$$

$$\text{نقطه میانی} = \frac{2 \log_2 3 - 2}{2} = \log_2 3 - 1 = \log_2 3 - \log_2 2 = \log_2 \frac{3}{2}$$

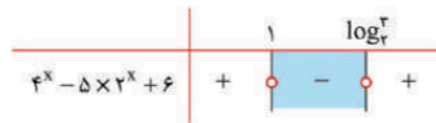
(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۰

ابتدا عبارت $4^x - 5 \times 2^x + 6$ را تجزیه و سپس ریشه‌های آن را به دست می‌آوریم و در نهایت تعیین علامت خواهیم کرد:

$$(2^x)^2 - 5 \times 2^x + 6 \leq 0 \rightarrow (2^x - 3)(2^x - 2) \leq 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2^x - 3 = 0 \rightarrow x = \log_2 3 \\ 2^x - 2 = 0 \rightarrow x = \log_2 2 = 1 \end{cases}$$



پس جواب ما بازه $[1, \log_2 3]$ خواهد بود.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۱

با توجه به تعریف تابع نمایی مشخص است که تابع $f(x)$ اکیدا نزولی و تابع $g(x)$ اکیدا صعودی است.

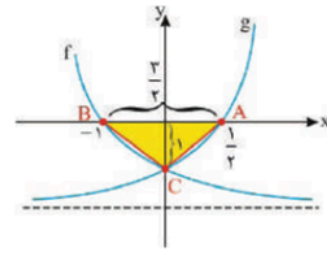
$$f(0) = g(0) \rightarrow 1 + b = 1 + c \rightarrow b = c$$

$$f(-1) = 0 \rightarrow 0 = 2^1 + b = 0 \rightarrow b = -2 = c$$

$$g(x) = 4^x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow A\left(\frac{1}{2}, 0\right), B(-1, 0)$$

$$g(0) = 4^0 - 2 = -1 \rightarrow C(0, -1)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \times 1}{2} = \frac{3}{4}$$



(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

بررسی حاصلضرب و حاصل جمع ریشه‌های معادله داده شده همیشه توی این سبک از سؤال‌ها راهگشاست. برید سراغ S و P

سرنخ

۸۲

پله اول: حاصلضرب ریشه‌های معادله $x^2 + bx + c = 0$ برابر c است:

$$x_1 x_2 = c \Rightarrow c \log_b^b = c \Rightarrow \log_b^b = 1 \Rightarrow b = 2$$

$$x_1 + x_2 = -b \Rightarrow c + \log_b^b = -2 \Rightarrow c = -3$$

از طرفی مجموع ریشه‌ها برابر -b است، پس:

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{5}}^{(b-c)} = \log_{\sqrt{5}}^{(2+3)} = \log_{\sqrt{5}}^5 = 2$$

پله دوم:

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

می‌دانیم $2^{\log 3} = 3^{\log 2}$ است، پس طرف راست معادله یعنی $2^{\log 3} - 3^{\log 2}$ برابر صفر است:

$$\log^{(2-x)} + \frac{1}{2} \log^{x^2} = 0 \Rightarrow \log^{(2-x)} + \log^{\sqrt{x^2}} = 0 \Rightarrow \log^{(2-x)} + \log^{|x|} = 0 \Rightarrow \log^{|x|(2-x)} = 0 \Rightarrow |x|(2-x) = 1$$

حالا با توجه به $|x|$ داریم:

$$(1) x > 0: x(2-x) = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \checkmark$$

$$(2) x < 0: -x(2-x) = 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1 + \sqrt{2} \times \\ x_3 = 1 - \sqrt{2} \checkmark \end{cases}$$

ریشه بزرگ‌تر معادله برابر $x_1 = 1$ و ریشه کوچک‌تر آن $x_3 = 1 - \sqrt{2}$ است. پس:

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{1}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1}{1 - \sqrt{2}} \times \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = -1 - \sqrt{2}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۳

۸۴

با توجه به نمودار، $f(0) = 3$ و $f\left(\frac{-7}{12}\right) = 0$ است، بنابراین داریم:

$$f(x) = a + \log_7^{bx+2}$$

$$\begin{cases} f(0) = a + \log_7^2 = 3 \rightarrow a + 1 = 3 \rightarrow a = 2 \\ f\left(\frac{-7}{12}\right) = 2 + \log_7^{\frac{-7}{12}b+2} = 0 \rightarrow \log_7^{\frac{-7}{12}b+2} = -2 \rightarrow -\frac{7b}{12} + 2 = \frac{1}{4} \rightarrow b = 3 \end{cases}$$

حال، حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$\log_{\sqrt{a}}^{\Delta b-3} = \log_{\sqrt{7}}^{\Delta(3)-3} = \log_{\sqrt{7}}^{12} = \log_{\sqrt{7}}^{12} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_7^{12} = 2 \log_7^{12} = \log_7^{24}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۵

از دو طرف معادله، در مبنای $3 \cdot 4$ لگاریتم می‌گیریم، داریم:

$$\log_{3 \cdot 4} x^{\log_{3 \cdot 4} x} = \log_{3 \cdot 4} \frac{x^4}{3 \cdot 4^3}$$

$$(\log_{3 \cdot 4} x)^2 = (4 \log_{3 \cdot 4} x) - 3$$

$$\xrightarrow{\log_{3 \cdot 4} x = t} t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ یا } 3$$

$$x = 3 \cdot 4^t = 3 \cdot 4^1 \text{ یا } 3 \cdot 4^3$$

پس:

و ضرب ریشه‌ها می‌شود $3 \cdot 4^4$.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۶

$$\frac{\log x^2}{x} = \log 2 \Rightarrow \log x^2 = x \log 2 = \log 2^x$$

$$\Rightarrow x^2 = 2^x \xrightarrow{x > 0} x = 2 \text{ یا } 4$$

می‌دانیم برای $x > 0$ نمودارهای x^2 ، 2^x در طول‌های ۲، ۴ متقاطع‌اند پس فاصله این دو نقطه می‌شود $AB = 2$.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

معادله تقاطع ضابطه تابع خطی $y = 2x$ و $y = \log_3 \frac{\lambda^x + m}{3}$ ریشه مضاعف دارد.

$$y = \log_3 \frac{\lambda^x + m}{3} = 2x \rightarrow 3^{2x} = \frac{\lambda^x + m}{3} \rightarrow 3(3^x)^2 = (3^x)^2 + m$$

اگر 3^x را t فرض کنیم:

$$3t^2 = t^2 + m \rightarrow t^2 - 3t^2 + m = 0$$

این معادله ریشه مضاعف دارد. از $t^2 - 3t^2 + m = 0$ مشتق می‌گیریم.

$$3t^2 - 6t = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 0 \rightarrow 3^x = 0 \\ t = 2 \end{cases}$$

ریشه مضاعف مقدار خود $t^2 - 3t^2 + m = 0$ را صفر می‌کند.

$$3^2 - 3(2)^2 + m = 0 \rightarrow 8 - 12 + m = 0 \rightarrow m = 4$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نقطه‌ی $B(1, 11)$ در ضابطه تابع صدق می‌کند، پس:

$$\xrightarrow{B(1, 11) \in f} 11 = ab - 1 \rightarrow ab = 12 \rightarrow a = \frac{12}{b} \quad (I)$$

نقطه‌ی $A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ در ضابطه تابع صدق می‌کند، پس:

$$\xrightarrow{A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in f} \frac{1}{2} = a(b)^{-\frac{1}{2}} - 1 \rightarrow \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{3}{2} \quad (II)$$

با استفاده از رابطه‌ی (I)، a را برحسب b قرار می‌دهیم:

$$\xrightarrow{(I)} \frac{3}{2} = \frac{\frac{12}{b}}{\sqrt{b}} \rightarrow \frac{3}{2} = \frac{12}{b\sqrt{b}}$$

$$\rightarrow b\sqrt{b} = 8 \Rightarrow b^{\frac{3}{2}} = 64 \rightarrow b = 4 \xrightarrow{(I)} a = 3$$

در نتیجه $f(x) = 3(4)^x - 1$ ، بنابراین:

$$f(-1) = 3(4)^{-1} - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گام اول: از طرفین تساوی $3^{x^2-y^2} = 81$ ، لگاریتم در مبنای ۲ می‌گیریم.

$$\log_3 3^{x^2-y^2} = \log_3 81 \Rightarrow \underbrace{(x^2-y^2)}_{\text{مزدوج: } (x-y)(x+y)} \log_3 3 = \log_3 3^4 \Rightarrow (x-y)(x+y) = 4 \log_3 3 = 4 \times \frac{\log 3}{\log 3}$$

$$\frac{\log 3}{\log 3} \times (x+y) = 4 \times \frac{\log 3}{\log 3} \Rightarrow x+y = 4$$

گام دوم: طبق صورت سؤال، با جای‌گذاری $x-y = \frac{\log 3}{\log 2}$ ، داریم:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۰

گام اول: صورت کسر در ضابطه f را با استفاده از دسته‌بندی و فاکتورگیری تجزیه می‌کنیم و سپس با مخرج ساده می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{2^x \times 3^x - 2 \times 3^x + 2^x - 2}{2^{x-1} - 1} = \frac{3^x(2^x - 2) + (2^x - 2)}{2^{x-1} - 1} = \frac{(2^x - 2)(3^x + 1)}{2^{x-1} - 1} = \frac{2(2^{x-1} - 1)(3^x + 1)}{2^{x-1} - 1}$$

$$\xrightarrow{2^{x-1} - 1 \neq 0} f(x) = 2(3^x + 1), \quad x \neq 1$$

$$\xrightarrow{2^{x-1} \neq 1 \Rightarrow x \neq 1}$$

گام دوم: ضابطه وارون تابع f را به دست می‌آوریم.

$$f: y = 2(3^x + 1) \Rightarrow \frac{y}{2} = 3^x + 1 \Rightarrow 3^x = \frac{y}{2} - 1 \quad (1)$$

از طرفین تساوی (۱)، لگاریتم در مبنای ۳ می‌گیریم.

$$\log_3 3^x = \log_3 \frac{y}{2} - 1 \Rightarrow x = \log_3 \frac{y-2}{2} \xrightarrow{\text{جای } y, x \text{ را عوض می‌کنیم}} f^{-1}(x) = y = \log_3 \frac{x-2}{2} \quad (2)$$

گام سوم: از مقایسه (۲) با $f^{-1}(x) = \log_c \frac{x+a}{b}$ نتیجه می‌گیریم $a = -2, b = 2, c = 3$ است؛ پس $a + b + c = 3$ می‌شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۱

گام اول: نمودار تابع $f(x) = 2^{ax} + b$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ ، به خط $y = -4$ نزدیک می‌شود (خط‌چین)، پس $b = -4$ است؛ یعنی: $f(x) = 2^{ax} - 4$.

گام دوم: نقطه (۳، ۴) روی نمودار تابع f قرار دارد؛ پس مختصات آن در تابع f صدق می‌کند.

$$f(3) = 4 \Rightarrow 2^{3a} - 4 = 4 \Rightarrow 2^{3a} = 8 = 2^3 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(x) = 2^x - 4$$

گام سوم: دو تابع f و g روی محور x ها نقطه مشترک دارند. نقطه برخورد تابع f با محور x ها را پیدا می‌کنیم و در ضابطه g صدق می‌دهیم.

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2^x - 4 = 0 \Rightarrow 2^x = 4 = 2^2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 0) \in f$$

$$(2, 0) \in g \Rightarrow g(2) = 0 \Rightarrow \log_2^2 + c = 0 \Rightarrow 1 + c = 0 \Rightarrow c = -1$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۲

گام اول: این که کیفیت عملکرد یخچال هر سال نسبت به سال قبل ۱۰ درصد کاهش می‌یابد، یعنی هر سال 0.9 سال قبل می‌شود. اگر کیفیت عملکرد نو آن را A در نظر بگیریم، پس از گذشت t سال کیفیت عملکرد آن $A(t)$ برابر است با:

$$A, \quad 0.9A, \quad (0.9)^2 A, \quad (0.9)^3 A, \quad \dots$$

$$\uparrow \text{سال سوم} \quad \uparrow \text{سال دوم} \quad \uparrow \text{سال اول} \quad \uparrow \text{اولیه}$$

$$A(t) = A(0.9)^t$$

گام دوم: طبق سؤال $A(t)$ را برابر با $0.27A$ قرار می‌دهیم و t را به دست می‌آوریم.

$$0.27A = A(0.9)^t \Rightarrow (0.9)^t = 0.27 \xrightarrow{\text{از طرفین لگاریتم می‌گیریم}} \log(0.9)^t = \log 0.27 \Rightarrow t \log(0.9) = \log 0.27$$

$$\Rightarrow t = \frac{\log \frac{27}{100}}{\log \frac{9}{10}} = \frac{\log 27 - \log 100}{\log 9 - \log 10} = \frac{\log 3^3 - 2}{\log 3^2 - 1} = \frac{3 \log 3 - 2}{2 \log 3 - 1} \xrightarrow{\log 3 = 0.48} t = \frac{3 \times 0.48 - 2}{2 \times 0.48 - 1}$$

$$\Rightarrow t = \frac{1.44 - 2}{0.96 - 1} = \frac{-0.56}{-0.04} = 14$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گام اول: برای به دست آوردن طول نقاط تلاقی دو تابع $y = 2x - 1$ و $y = 2 + \log_3(3^x - 6)$ ، کافی است ضابطه آنها را با هم برابر قرار دهیم:

$$2 + \log_3(3^x - 6) = 2x - 1 \Rightarrow \log_{\underset{B}{3}}(\overset{A}{3^x - 6}) = \overset{C}{2x - 3}$$

$$\xrightarrow{\log_B A = C \Rightarrow A = B^C} \underbrace{3^x - 6 = 3^{2x-3}}_{(*)}$$

$$3^{2x-3} = \frac{3^{2x}}{3^3} = \frac{(3^x)^2}{27}$$

گام دوم: 3^{2x-3} را ساده تر می کنیم:

$$3^x - 6 = \frac{(3^x)^2}{27}$$

گام سوم: با جای گذاری در (*) داریم:

$$\Rightarrow t - 6 = \frac{t^2}{27} \Rightarrow 27t - 162 = t^2 \Rightarrow t^2 - 27t + 162 = 0$$

گام چهارم: از تغییر متغیر $3^x = t$ کمک می گیریم:

$$\Rightarrow (t - 9)(t - 18) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 9 \\ t = 18 \end{cases}$$

نکته اگر $a^b = c$ باشد، $b = \log_a c$ می شود.

گام پنجم: به جای t قرار می دهیم 3^x : (مقادیر x همان ریشه های معادله اولیه، یعنی α و β هستند)

$$\begin{cases} 3^x = 9 = 3^2 \Rightarrow x = 2 = \alpha \\ \log_{\frac{a}{b}} \frac{c}{c} = \frac{1}{c} \xrightarrow{\text{طبق نکته}} x = \log_3 18 = \beta \end{cases}$$

$$\underbrace{\log_3 9}_2 < \log_3 18 < \underbrace{\log_3 27}_3 \Rightarrow 2 < \log_3 18 < 3$$

گام ششم: در آخر باید مقدار $[\alpha + \beta]$ را محاسبه کنیم، دقت کنید که:

$$[\alpha + \beta] = [2 + \log_3 18] = 2 + [\log_3 18] = 2 + 2 = 4$$

پس:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۴

پاسخ تشریحی

گام اول: (ابتدا دقت کنید که $\frac{1}{8} = 2^{-3}$ است، پس: $\sqrt[3]{0/125} = \sqrt[3]{2^{-3}} = 2^{-\frac{3}{2}}$

$$\sqrt[3]{0/125} = \sqrt[3]{2^{-3}} = 2^{-\frac{3}{2}}$$

$$2^{-\frac{3}{2}} = 4^{\log_{27} x} \Rightarrow 2^{-\frac{3}{2}} = (2^2)^{\log_{27} x} = 2^{2 \log_{27} x}$$

گام دوم: حالا با جای گذاری در معادله $\sqrt[3]{0/125} = 4^{\log_{27} x}$ داریم:

$$\xrightarrow{\text{پایه ها برابرند، پس توان ها هم برابر می شوند.}} -\frac{3}{2} = 2 \log_{27} x \Rightarrow \log_{27} x = -\frac{3}{4}$$

$$\log_{27} x = -\frac{3}{4} \Rightarrow x = 27^{-\frac{3}{4}} = (3^3)^{-\frac{3}{4}} = 3^{-\frac{9}{4}}$$

گام سوم: از طرفی می دانیم اگر $\log_b a = c$ باشد، $a = b^c$ می شود، پس:

$$\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n} \log_b a \quad \text{نکته}$$

گام چهارم: در آخر با جای گذاری $3^{-\frac{9}{4}}$ به جای x در $\log_x 9$ ، مقدار آن را محاسبه می کنیم:

$$\log_{3^{-\frac{9}{4}}} 9 = \log 3^{-\frac{9}{4}} \cdot 3^2 = \frac{2}{-\frac{9}{4}} \underbrace{\log_3 3}_1 = -\frac{8}{9}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۵

پاسخ تشریحی

گام اول: می دانیم $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ است؛ پس:

$$\log_b a = \frac{9}{\log_b a} \Rightarrow (\log_b a)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} \log_b a = -3 \\ \log_b a = 3 \Rightarrow a = b^3 \end{cases}$$

توجه کنید که چون $a, b > 1$ هستند، $\log_b a < 0$ است؛ پس $\log_b a$ نمی تواند -3 باشد.

گام دوم: در معادله $(\log a)x^2 - (\log a^2 + \log b)x + \log ab = 0$ به جای a مقدار b^3 را قرار می دهیم:

$$\underbrace{(\log b^3)}_{3 \log b} x^2 - \underbrace{(\log b^6 + \log b)}_{7 \log b} x + \underbrace{\log(b^3 \times b)}_{4 \log b} = 0 \xrightarrow{\div \log b} 3x^2 - 7x + 4 = 0 \quad (1)$$

گام سوم: مجموع ضرایب معادله (۱) صفر است، پس یکی از ریشه ها $x = 1$ و دیگری $x = \frac{C}{A} = \frac{4}{3}$ است؛ در نتیجه اختلاف جواب ها برابر با $\frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گام اول: در تابع $y = \log_a x$ دامنه تابع به صورت $x > 0$ است؛ بنابراین برای تابع داده شده داریم:

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{\log_{\frac{1}{2}} 2x}\right) \Rightarrow 1) \log_{\frac{1}{2}} 2x \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0 \quad (*)$$

با توجه به $(*)$ ، صورت این کسر مثبت است؛ پس باید مخرج کسر هم مثبت باشد تا کل عبارت، مثبت شود:

$$2) \frac{x}{\log_{\frac{1}{2}} 2x} > 0 \Rightarrow$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 2x > 0 \Rightarrow -\log_2 2x > 0 \Rightarrow -(\log_2 2 + \log_2 x) > 0 \Rightarrow 1 + \log_2 x < 0$$

$$\Rightarrow \log_2 x < -1 \Rightarrow x < 2^{-1} \Rightarrow x < \frac{1}{2} \quad (**)$$

گام دوم: با اشتراک $(*)$ و $(**)$ ، دامنه تابع به صورت $(0, \frac{1}{2})$ به دست می آید.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گام اول: لگاریتمها را ساده می کنیم، ابتدا آنها را به مبنای ۲ تبدیل می کنیم:

$$(\log_8 \frac{x}{4})(\log_4 4x) = \frac{7}{2} \Rightarrow (\log_{2^3} \frac{x}{4})(\log_{2^2} 4x) = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{3} \log_2 \frac{x}{4})(\frac{1}{2} \log_2 4x) = \frac{7}{2} \Rightarrow (\log_2 \frac{x}{4})(\log_2 4x) = 21$$

$$\Rightarrow (\log_2 x - \log_2 4)(\log_2 x + \log_2 4) = 21$$

$$\Rightarrow (\log_2 x - 2)(\log_2 x + 2) = 21 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (\log_2 x)^2 - 4 = 21 \Rightarrow (\log_2 x)^2 = 25 \quad (*)$$

$$1) \log_2 x = 5 \Rightarrow x = 2^5$$

گام دوم: حالا برای معادله $(*)$ دو حالت داریم:

$$2) \log_2 x = -5 \Rightarrow x = 2^{-5}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = 2^{1^\circ} \Rightarrow \log_{2^2} \frac{\alpha}{\beta} = \log_{2^5} 2^{1^\circ} = \frac{1^\circ}{5} = 2 \quad \text{گام سوم: پس } \frac{\alpha}{\beta} \text{ می تواند یکی از مقادیر } 2^{1^\circ} \text{ یا } 2^{-1^\circ} \text{ باشد، در این صورت داریم:}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = 2^{-1^\circ} \Rightarrow \log_{2^2} \frac{\alpha}{\beta} = \log_{2^5} 2^{-1^\circ} = \frac{-1^\circ}{5} = -2$$

که با توجه به گزینه ها، مقدار خواسته شده برابر با ۲ می تواند باشد.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

پاسخ تشریحی گام اول: به کمک خواص لگاریتم، معادله داده شده را ساده می کنیم:

$$\log_{\sqrt{b}} a^{\frac{1}{2}} - \log_a b^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}} a - \frac{1}{2} \log_a b = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \log_b a - \frac{1}{2} \log_a b = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_b a - \log_a b = 1$$

گام دوم: حالا از تغییر متغیر $A = \log_b a$ استفاده می کنیم:

$$\frac{1}{2} A - \frac{1}{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} A^2 - A - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow (A-1)(A+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ A=-1 \end{cases}$$

گام سوم: حالا داریم:

$$\begin{cases} A=1 = \log_b a \Rightarrow a=b \Rightarrow \text{طبق صورت سؤال، قابل قبول نیست.} \\ A=-1 = \log_b a \Rightarrow a=b^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \Rightarrow a^{\frac{1}{2}} b = 1 \end{cases}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

پاسخ تشریحی گام اول: تابع $g(x)$ را تشکیل می دهیم:

$$g(x) = 3f(2x-1) + 1 = 3 \times 2^{2x-1} + 1 = \frac{3}{2} \times 2^{2x} + 1$$

گام دوم: حالا وارون تابع $g(x)$ را به دست می آوریم:

$$y = \frac{3}{2} \times 2^{2x} + 1 \Rightarrow \frac{2}{3}(y-1) = 2^{2x} \xrightarrow{\text{از طرفین } \log_2 \text{ می گیریم.}} 2x = \log_2 \left(\frac{2}{3}y - \frac{2}{3} \right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{2}{3}y - \frac{2}{3} \right) \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض می کنیم.}} y = g^{-1}(x) = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \right)$$

$$= \log_2 \left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \right) = \log_2 U(x) \Rightarrow U(x) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

$$U(4) = \frac{2}{3} \times 4 - \frac{2}{3} = \frac{8-2}{3} = 2$$

گام سوم: مقدار $U(4)$ را به دست می آوریم:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

اکنون داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{\log_2^x + \frac{4}{3} \log_2^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{\log_2^x + \frac{4}{3} \log_2^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3} \log_2^x + \frac{4}{3} \log_2^{\frac{1}{2}}}}$$

$$x > 1 \Rightarrow \log_2^x > 0, \log_2^{\frac{1}{2}} > 0$$

$$\frac{1}{3} \log_2^x + \frac{4}{3} \log_2^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{3} \log_2^x \times \frac{4}{3} \log_2^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{9} \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3} \log_2^x + \frac{4}{3} \log_2^{\frac{1}{2}}}} \geq \frac{3}{2} = \frac{3}{\sqrt{4}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3} \log_2^x + \frac{4}{3} \log_2^{\frac{1}{2}}}} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۱

معادله داده شده، معادله‌ای درجه ۲ است. پس داریم:

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{(\log 9)^2 + 4 \times \log 1 \times \log \frac{\Delta}{3}}}{\log \frac{\Delta}{3}} = \frac{\sqrt{(2 \log 3)^2 + 4 \times (\log \Delta + \log 3)(\log \Delta - \log 3)}}{\log \Delta - \log 3}$$

$$= \frac{\sqrt{4(\log 3)^2 + 4[(\log \Delta)^2 - (\log 3)^2]}}{\log \Delta - \log 3} = \frac{\sqrt{4(\log \Delta)^2}}{\log \Delta - \log 3} = \frac{2 \log \Delta}{\log \Delta - \log 3}$$

می‌دانیم:

$$\log \Delta = \log \frac{1}{3} = \log 1 - \log 3 = 0 - \log 3 = -\log 3$$

$$\Rightarrow \frac{2 \log \Delta}{\log \Delta - \log 3} = \frac{2 \times -\log 3}{-\log 3 - \log 3} = \frac{1/\cancel{4}}{-\cancel{2}/3} = \frac{1\cancel{4}}{3}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۲

نمودار g از مبدأ عبور کرده است، پس:

$$g(x) = -(x-2)^3 - 8 = -x^3 + 6x^2 - 12x$$

$$\Rightarrow f(x) = 6x^2 - 12x$$

دامنه تابع لگاریتمی به گونه‌ای است که f(x) باید مثبت باشد.

$$f(x) > 0 \Rightarrow 6x^2 - 12x > 0 \Rightarrow x < 0 \vee x > 2$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۳

فرض کنید $t = \log_3^x$ باشد، چون $x > 1$ است، پس $t > 0$ است.

$$P = 4 \log_3^x + \log_3^{1/6} = 4t + \frac{1}{t} = (2\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})^2 + 8$$

بنابراین $P \geq 8$ و $f(x) \geq \sqrt{8}$ است. یعنی برد f بازه $[2\sqrt{2}, +\infty)$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۴

برای محاسبه ضابطه وارون، جای X و Y را عوض می‌کنیم:

$$x = (2^y + 2)^2 - 4 \Rightarrow 2^y + 2 = \sqrt{x+4} \Rightarrow y = \log_2(\sqrt{x+4} - 2)$$

پس $g(x) = \sqrt{x+4} - 2$ ، حال وارون g را محاسبه می‌کنیم.

$$x = \sqrt{y+4} - 2 \Rightarrow y = (x+2)^2 - 4 \Rightarrow g^{-1}(x) = x^2 + 4x$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۵

تابع صعودی دارای عرض از مبدأ ۲ و تابع نزولی دارای عرض از مبدأ ۴ است. اگر فرض کنیم f صعودی است، آن‌گاه:

$$\begin{cases} f(\cdot) = a = 2 \Rightarrow f(x) = 2 \times 2^{2x} \\ g(\cdot) = b = 4 \Rightarrow g(x) = 4 \times 2^{-2x} \end{cases}$$

پس فرض صعودی بودن f صحیح است. (در حالت فرض نزولی بودن f، به تناقض می‌رسیم.)

$$f(\alpha) = g(\alpha) \Rightarrow 2 \times 2^{2\alpha} = 4 \times 2^{-2\alpha} \Rightarrow 2^{4\alpha+1} = 2^{2-2\alpha}$$

$$\Rightarrow 1 + 4\alpha = 2 - 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{6} \Rightarrow \log_2^{\frac{1}{6}} = -\frac{1}{3}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۶

$$f: \text{وارون } x = \log_r \frac{9+y}{9} \Rightarrow \frac{9+y}{9} = r^x$$

$$\Rightarrow y = f^{-1}(x) = 9(-1 + r^x)$$

حال نقطه برخورد را محاسبه می‌کنیم. فرض کنید $r^x = t$

$$g = f^{-1} \Rightarrow r^{2x} + 5 = 9(-1 + r^x) \Rightarrow t^2 + 5 = 9(-1 + t)$$

$$\Rightarrow t^2 - 9t + 14 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 = r^{x_1} \\ t = 7 = r^{x_2} \end{cases}$$

$$\text{ضرب} \Rightarrow 14 = r^{x_1 + x_2} \Rightarrow x_1 + x_2 = \log_r 14$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$P = \frac{\log_r a^r}{\log_r r^{\sqrt[3]{a}}} = \frac{\log_r a + \log_r r^r}{\log_r r^{\sqrt[3]{a}} + \log_r r^{\sqrt[3]{a}}} = \frac{r + r \log_r a}{r + \frac{1}{r} \log_r a}$$

فرض کنید $\log_r a = t$ و چون $a > r$ ، پس $t > 1$ است.

$$P = \frac{r + rt}{r + \frac{1}{r}t} = \frac{rt + r}{t + r} = r - \frac{r^2}{t + r}$$

$$t > 1 \Rightarrow t + r > r \Rightarrow 0 < \frac{r^2}{t + r} < \frac{r^2}{r} \Rightarrow \frac{1}{r} < P < r$$

$$1 \leq [P] \leq 5 \Rightarrow \max - \min = 5 - 1 = 4$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$P = \frac{\log_r a^r}{\log_r r^{\sqrt[3]{a}}} = \frac{\log_r a + \log_r r^r}{\log_r r^{\sqrt[3]{a}} + \log_r r^{\sqrt[3]{a}}} = \frac{r + r \log_r a}{r + \frac{1}{r} \log_r a}$$

فرض کنید $\log_r a = t$ و چون $a > r$ ، پس $t > 1$ است.

$$P = \frac{r + rt}{r + \frac{1}{r}t} = \frac{rt + r}{t + r} = r - \frac{r^2}{t + r}$$

$$t > 1 \Rightarrow t + r > r \Rightarrow 0 < \frac{r^2}{t + r} < \frac{r^2}{r} \Rightarrow \frac{1}{r} < P < r$$

$$1 \leq [P] \leq 5 \Rightarrow \max - \min = 5 - 1 = 4$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۹

بجای ۱، می‌نویسیم $\log_r$.

$$\log_r (r^x - r) + \log_r r = \log_r r^{x+r} \Rightarrow \log_r r^{(r^x - r)} = \log_r r^{x+r}$$

$$\Rightarrow r(r^x - r) = r^{x+r} \Rightarrow r \times r^x - r^2 = r \times r^x \Rightarrow r^x = r$$

$$\Rightarrow r^\alpha = r \Rightarrow r^{\alpha-1} = 1 \Rightarrow \log_r r^{\alpha-1} = 1$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم:

۱۱۰

$$x^r - x \log_r^r - b \log_r^r = 0$$

حال $x=1$ را آزمایش می‌کنیم:

$$1 - \log_r^r - b \log_r^r = 0 \Rightarrow b = \frac{\log_r^r}{\log_r^r} = \log_r^r$$

از طرفی، ضرب ریشه‌ها برابر $-b \log_r^r$ است و چون یکی از ریشه‌ها برابر یک است، پس:

$$a = -b \log_r^r = -\log_r^r \times \log_r^r = -\log_r^r \Rightarrow a = \log_r^r \Rightarrow r^a = \frac{r}{r}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

خط رسم شده در شکل، از سه نقطه $(-k, 0)$ ، $(0, \log_r^k)$ و $(r, \log_r^{(r+k)})$ عبور کرده است، پس:

۱۱۱

$$\frac{\log_r^{(r+k)} - 0}{r+k} = \frac{\log_r^k - 0}{k} \Rightarrow k \log_r^{(r+k)} = (r+k) \log_r^k \Rightarrow \log_r^{(r+k)k} = \log_r^{k(r+k)}$$

$$\Rightarrow (r+k)^k = k^{(r+k)} \xrightarrow{(r^r = r^r)} k = r$$

$$\Rightarrow f(x) = \log_r^{(x+r)} \Rightarrow f^{-1}(r) = r$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

پس از n سال قیمت کالا $(1/0.5)^n$ برابر می‌شود.

۱۱۲

$$(1/0.5)^n = r \Rightarrow n = \frac{\log r}{\log 1/0.5} = \frac{\log r}{\log 1/0.5 - 2} = \frac{\log r}{\log r + \log 1/5 - 2}$$

$$= \frac{0/84}{0/84 + 1/18 - 2} = \frac{0/84}{0/0.2} = 42$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

محل برخورد تابع نمایی $f(x) = 3a^{2x-1} + 2$ با محور y ها برابر است با:

۱۱۳

$$f(0) = 3a^{-1} + 2 = \frac{3}{a} + 2 \Rightarrow A\left(0, \frac{3}{a} + 2\right)$$

از آن جایی که فاصله نقطه $B(0, 2)$ از نقطه $A\left(0, \frac{3}{a} + 2\right)$ برابر ۶ است و این دو نقطه دارای طول یکسان هستند، پس:

$$|AB| = |y_A - y_B| \Rightarrow \left| 2 - \left(\frac{3}{a} + 2 \right) \right| = 6 \Rightarrow \left| \frac{3}{a} \right| = 6 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

از آن جایی که f یک تابع نمایی است، پس a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف ۱ است، بنابراین $a = \frac{1}{2}$ قابل قبول است و داریم:

$$f(x) = 3 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{2x-1} + 2 \Rightarrow f(1) = 3 \times \left(\frac{1}{2} \right)^1 + 2 = \frac{3}{2} = 3/2$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۴

می‌دانیم $\log_3^4 = \log_3^2$ است. حالا ابتدا معادله را به صورت مرتب بازنویسی می‌کنیم:

$$x^2 \log_3^4 - (x+1) \log_3^2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 \log_3^4 - x \log_3^2 - \log_3^2 - 2 = 0$$

حالا به جای عدد ۲، $\log_3^9$ را قرار می‌دهیم:

$$x^2 \log_3^4 - x \log_3^2 - (\log_3^2 + \log_3^9) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 \log_3^4 - x \log_3^2 - \log_3^{18} = 0$$

از طرفی می‌دانیم حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم برابر $\frac{c}{a}$ است، پس:

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-\log_3^{18}}{\log_3^4} = -\log_3^{18}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۵

چون $\log_3^3 = a$ است، پس $\log_3^2 = \frac{1}{a}$ است. حالا برای محاسبه $\log_3^{15}$ ، آن را به مبنای ۳ می‌بریم:

$$\log_3^{15} = \frac{\log_3^{15}}{\log_3^3} = \frac{\log_3^3 + \log_3^5}{\log_3^3 + \log_3^5} = \frac{1+b}{\frac{1}{a}+b} = \frac{1+b}{\frac{1+ab}{a}} = \frac{ab+a}{1+ab}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۶

از تساوی $\log\left(\frac{x-y}{3}\right) = 4$ داریم:

$$\log\left(\frac{x-y}{3}\right) = 4 \Rightarrow \frac{x-y}{3} = 10^4 \Rightarrow x-y = 3 \times 10^4$$

حالا به طرفین تساوی $x^2 + y^2 = 20xy$ جمله $-2xy$ را اضافه می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 - 2xy = 20xy - 2xy \Rightarrow (x-y)^2 = 18xy$$

در ضمن می‌دانیم $x-y = 3 \times 10^4$ است، پس:

$$18xy = (3 \times 10^4)^2 = 9 \times 10^8 \Rightarrow 2xy = 10^8$$

$$\Rightarrow \log x + \log 2y = \log 2xy = \log 10^8 = 8$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۷

ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\left| 3 - \log_3^x \right| + \log_3^x = 3 \Rightarrow \left| 3 - \log_3^x \right| = 3 - \log_3^x$$

از طرفی می‌دانیم اگر $|u| = u$ باشد، عبارت درون قدرمطلق یعنی u بزرگتر یا مساوی صفر است، پس:

$$3 - \log_3^x \geq 0 \Rightarrow \log_3^x \leq 3 \Rightarrow \log_3^x \leq \log_3^9 \Rightarrow x \leq 9$$

در ضمن عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت باشد، پس:

$$x > 0$$

حالا از اشتراک بازه‌های به دست آمده، مجموعه جواب معادله برابر بازه $(0, 9]$ است که شامل ۴ عدد طبیعی زوج است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

ابتدا وارون تابع $f(x) = \log_3(3x - 6)$ را به دست می آوریم:

$$y = \log_3(3x - 6) \Rightarrow 3^y = 3x - 6 \Rightarrow x = \frac{3^y + 6}{3}$$

$$\Rightarrow x = 3^{y-1} + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = 3^{x-1} + 2$$

حالا ضابطه $g(x)$ را مشخص می کنیم:

$$g(x) = \sqrt{29 - f^{-1}(x)} = \sqrt{29 - (3^{x-1} + 2)} = \sqrt{27 - 3^{x-1}}$$

عبارت زیر رادیکال باید بزرگ تر یا مساوی صفر باشد، پس:

$$27 - 3^{x-1} \geq 0 \Rightarrow 3^{x-1} \leq 27 \Rightarrow 3^{x-1} \leq 3^3$$

$$\Rightarrow x - 1 \leq 3 \Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow D_g = (-\infty, 4]$$

پس دامنه تابع g دارای ۴ عدد طبیعی است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

با توجه به نمودار تابع f در صورت سوال، دامنه تابع f برابر بازه $(a, +\infty)$ است. پس عبارت جلوی لگاریتم به ازای $x = a$ برابر صفر می شود.

$$ax - 4 = 0 \xrightarrow{x=a>0} a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 & \checkmark \\ a = -2 & \times \end{cases}$$

پس $f(x) = \log_3(2x - 4)$ است. حالا ابتدا محل برخورد نمودار با محور x ها را پیدا می کنیم:

$$\log_3(2x - 4) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 1 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow A\left(\frac{5}{2}, 0\right)$$

با توجه به این که عرض نقطه B برابر ۲ است، پس برای پیدا کردن طول نقطه B داریم:

$$\log_3(2x - 4) = 2 \Rightarrow 2x - 4 = 9 \Rightarrow x = \frac{13}{2} \Rightarrow B\left(\frac{13}{2}, 2\right)$$

بنابراین فاصله دو نقطه A و B برابر است با:

$$AB = \sqrt{\left(\frac{13}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

با استفاده از خواص لگاریتم داریم:

۱۲۰

$$\log_2(\log_2^x) + \log_2(\log_2^x) = 2$$

$$\Rightarrow \log_2\left(\frac{1}{2}\log_2^x\right) + \frac{1}{2}\log_2(\log_2^x) = 2$$

$$\Rightarrow \log_2\left(\frac{1}{2}\log_2^x\right) + \log_2\sqrt{\log_2^x} = 2$$

$$\Rightarrow \log_2\left(\frac{1}{2}\log_2^x\right)(\sqrt{\log_2^x}) = 2$$

$$\frac{1}{2}\log_2^x \times \sqrt{\log_2^x} = 2^2 \Rightarrow \log_2^x \times \sqrt{\log_2^x} = 8$$

حالا با تغییر متغیر $\log_2^x = t$ داریم:

$$t\sqrt{t} = 8 \xrightarrow{\text{توان } 2} t^3 = 64 \Rightarrow t = 4$$

$$\Rightarrow \log_2^x = 4 \Rightarrow x = 2^4 = 16 \rightarrow \log_8^x = \log_8^{16} = \log_{2^3}^{2^4} = \frac{4}{3}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

باید $\frac{4-k^2}{k-4} > 0$ باشد.

۱۲۱

$$\frac{k}{\frac{4-k^2}{k-4}} \quad \begin{array}{c|ccc} & -2 & 2 & 4 \\ \hline & + & - & + \\ \hline & \circ & \circ & \circ \end{array} \Rightarrow \begin{cases} k < -2 \\ -2 < k < 4 \end{cases} \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} k = 3$$

$$k = 3 \Rightarrow f(x) = 5^x$$

خواهیم داشت:

$$f(-1) + f(1) = \frac{1}{5} + 5 = \frac{26}{5}$$

توجه داشته باشید که باید $\frac{4-k^2}{k-4} \neq 1$ باشد که در این صورت $k \neq \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2}$ است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$2^{3x+2} - 2^{3x+1} + 2^{3x-1} = 5 \cdot x \Rightarrow 2^{3x} \times 2^2 - 2^{3x} \times 2 + 2^{3x} \times 2^{-1} = (2 \times 5^2)^x$$

۱۲۲

$$\Rightarrow 4 \times 2^{3x} - 2 \times 2^{3x} + \frac{1}{2} \times 2^{3x} = 2^x \times 5^{2x} \Rightarrow \left(4 - 2 + \frac{1}{2}\right) \times 2^{3x} = 2^x \times 5^{2x} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{5^{2x} \times 2^x}{2^{3x}}$$

$$\Rightarrow \frac{5^{2x}}{2^{3x}} = \frac{5}{2} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{5}{2}\right) \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۳

ابتدا دامنه $\log$ را حساب می‌کنیم:

$$\log(3-x) \rightarrow 3-x > 0 \rightarrow x < 3$$

حال عبارت زیر رادیکال را تعیین علامت می‌کنیم: (دقت کنید که: $(\log(3-x)) > 0 \Rightarrow 3-x > 1 \Rightarrow x < 2$)

	۰	۲	۳	
x	-	+	+	
$\log(3-x)$	+	+	-	تن
$\overline{x}$				
$\log(3-x)$	-	+	-	تن

پس، $0 \leq x < 2$ ، دامنه تابع است. اعداد صحیح $x=0$ و $x=1$ عضو دامنه‌اند.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۴

اگر عبارت داده شده را برابر A در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{aligned} A &= \log_7^{\wedge^*} \times \log_7^{\wedge^*} - \log_7^{\wedge^*} \times \log_7^{\wedge^*} = \log_7^{(7^{\wedge^*} \times \wedge)} \log_7^{(7^{\wedge^*} \times \wedge)} - \log_7^{(7^{\wedge^*} \times \wedge)} \log_7^{(7^{\wedge^*} \times \wedge)} \\ &= \left(\wedge + \log_7^{\wedge^*} \right) \left(\wedge + \log_7^{\wedge^*} \right) - \left(\wedge + \log_7^{\wedge^*} \right) \left(\wedge + \log_7^{\wedge^*} \right) \\ &= \left(1\wedge + \wedge \log_7^{\wedge^*} + \left(\log_7^{\wedge^*} \right)^{\wedge} \right) - \left(1\wedge + \wedge \log_7^{\wedge^*} + \left(\log_7^{\wedge^*} \right)^{\wedge} \right) = \wedge \end{aligned}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$g^{-1}(\wedge\wedge) = \wedge \Rightarrow g(\wedge) = \wedge\wedge$$

۱۲۵

اگر a را برابر ۲ در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

$$\wedge \log_7^{b^{\wedge}} + \wedge \log_7^b = \wedge\wedge \Rightarrow (b^{\wedge})^{\log_7^{\wedge}} + b^{\log_7^{\wedge}} = \wedge\wedge \Rightarrow (b^{\wedge})^{\frac{1}{\wedge}} + b^{\wedge} = \wedge\wedge \Rightarrow b + b^{\wedge} = \wedge\wedge \Rightarrow \begin{cases} b = -\wedge \\ b = \wedge \end{cases}$$

تذکر: b نمی‌تواند منفی باشد زیرا در لگاریتم قرار دارد، پس $b = -\wedge$ غیرقابل قبول است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$\begin{aligned} \log 1\wedge = a &\Rightarrow \log \wedge \times \wedge = a \Rightarrow \wedge \log \wedge + \log \wedge = a \\ \log \wedge = b &\Rightarrow \log \wedge^{\wedge} = b \Rightarrow \log \wedge = \frac{b}{\wedge} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \log \wedge = \frac{b}{\wedge} \\ \log \wedge = a - \frac{\wedge b}{\wedge} \end{cases}$$

۱۲۶

پس:

$$\log_7^{\wedge} = \frac{\log \wedge}{\log \wedge} = \frac{a - \frac{\wedge b}{\wedge}}{\wedge \log \wedge} = \frac{\frac{\wedge a - \wedge b}{\wedge}}{\frac{\wedge b}{\wedge}} = \frac{\wedge a - \wedge b}{\wedge b} = \frac{\wedge a}{\wedge b} - 1$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$\log_7^{x(x-\wedge)} = \log_7^{(x+\wedge)} + \log_7^{(\wedge-x)}$$

$$x(x-\wedge) = (x+\wedge)(\wedge-x) \Rightarrow x^{\wedge} - \wedge x = \wedge x - x^{\wedge} + \wedge - \wedge x \Rightarrow \wedge x^{\wedge} = \wedge \Rightarrow x = \pm \wedge$$

پس:

$$x = \wedge \Rightarrow \text{غ ق} \Rightarrow x = -\wedge \Rightarrow \log_k^{(-\wedge x + \wedge)} = \frac{\wedge}{\wedge}$$

$$\Rightarrow \log_k^{\wedge} = \frac{\wedge}{\wedge} \Rightarrow \wedge \log_k^{\wedge} = \frac{\wedge}{\wedge} \Rightarrow \log_k^{\wedge} = \frac{1}{\wedge} \Rightarrow k^{\frac{1}{\wedge}} = \wedge \Rightarrow k = \wedge$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۷

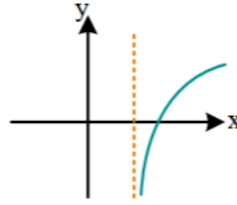
۱۲۸

با توجه به نمودار داده شده:

$$D_y = (-\infty, 4) \Rightarrow b - 4 = 0 \Rightarrow b = 4$$

$$y = a - \log_7(4-x) \Rightarrow 0 = a - \log_7 4 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow y = 2 - \log_7(4-x) \Rightarrow g(x) = 4 + \log_7(x-2)$$

از طرفی، $y(0) = 0$ ، پس:در این حالت: $D_g = (2, +\infty)$

و تابع صعودی اکید است. پس شکل مقابل است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۹

$$3 \times 2^{2t} = 2^{0.8} \Rightarrow 2^{2t} = \frac{2^{0.8}}{3} \xrightarrow{\text{از دو طرف لگاریتم در مبنای ۲ می‌گیریم}} \log_2 2^{2t} = \log_2 \frac{2^{0.8}}{3} \Rightarrow 2t = \log_2 \frac{2^{0.8}}{3}$$

$$\Rightarrow 2t = \log_2 2^{0.8} - \log_2 3 \Rightarrow 2t = 0.8 \log_2 2 - \log_2 3 \Rightarrow 2t = 0.8(\log_2 2 + \log_2 5) - \log_2 3 \Rightarrow 2t = 0.8(2 + \frac{\log 5}{\log 2}) - \frac{\log 3}{\log 2}$$

$$\xrightarrow{\log 5 = 1 - \log 2 \approx 0.7} 2t = 0.8(2 + \frac{0.7}{0.3}) - \frac{0.48}{0.3} \Rightarrow 2t = 1.6 + \frac{0.56}{0.3} - \frac{0.48}{0.3} \Rightarrow t = 0.8 + \frac{0.28}{0.3} - \frac{0.24}{0.3} \Rightarrow t = 0.8 + (0.9 + \frac{1}{3}) - \frac{0.8}{0.3} \approx 1.6/5$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۰

نکته: با فرض $a > 0$ و $a \neq 1$ اگر $a^x = a^y$ ، آنگاه: $x = y$

$$\text{نکته: } \log_b a^n = n \log_b a$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} = 9^{x-16} \Rightarrow (3^{-1})^{x^2+2x} = (3^2)^{x-16} \Rightarrow 3^{-x^2-2x} = 3^{2x-32} \Rightarrow -x^2-2x = 2x-32 \Rightarrow x^2+4x-32=0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x+8)=0 \xrightarrow{x_1 < x_2} x_1 = -8, x_2 = 4$$

$$x_1^{\log_2 x_2} = (-8)^{\log_2 4} = (-8)^{\log_2 2^2} = (-8)^2 = 64$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۱

ابتدا مقدار $\log 5$ را می‌یابیم:

$$\log 5 = 1 - \log 2 = 1 - 0.3 = 0.7$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$\log \sqrt{75} = \frac{1}{2} \log 75 = \frac{1}{2} (\log 5^2 \times 3) = \frac{1}{2} (2 \log 5 + \log 3) = \frac{1}{2} (1.4 + 0.48) = 0.7 + 0.24 = 0.94$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

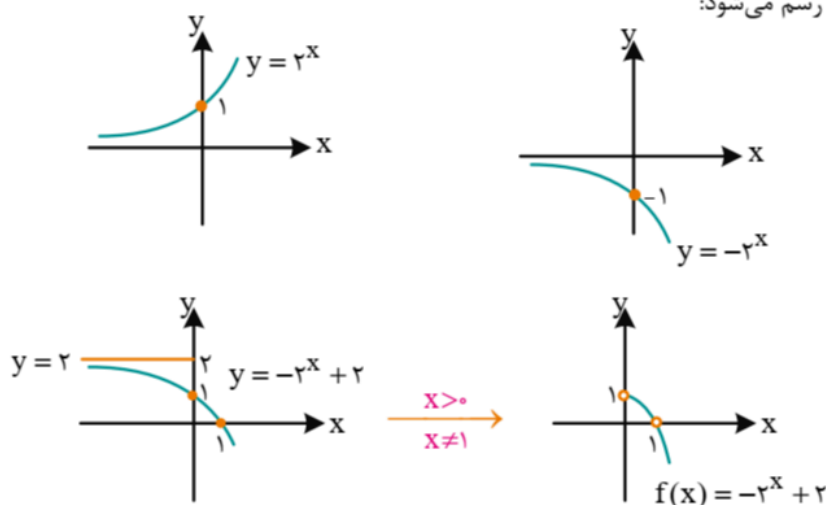
۱۳۲

توجه داریم که دامنه تابع $X > 0$ و $X \neq 1$ می باشد. یعنی:

ضابطه تابع را کمی ساده می کنیم. ببینید:

$$D_f = (0, +\infty) - \{1\}$$

$$f(x) = 2 - x^{x \log_2 x} = 2 - (x^{\log_2 x})^x = 2 - (2)^x \Rightarrow f(x) = 2 - 2^x, D_f = (0, +\infty) - \{1\}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر رسم می شود:

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۳

با توجه به آن که: $\log_c^a - \log_c^b = \log_c^{\frac{a}{b}}$

$$\frac{2x^2+1}{\log_2^{x+2}} = 1 \Rightarrow \frac{2x^2+1}{x+2} = 2 \Rightarrow 2x^2+1 = 2x+4 \Rightarrow 2x^2-2x-3=0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

چون قرار است $\log_{\sqrt[2]{2}}^{(2x-2)}$ را بدست آوریم پس $x = -1$ غیر قابل قبول است.

$$\Rightarrow \log_{\sqrt[2]{2}}^{(2x-2)} = \log_{\sqrt[2]{2}}^{\frac{2}{\sqrt[2]{2}}} = \log_{\frac{2}{\sqrt[2]{2}}}^{\frac{2}{\sqrt[2]{2}}} = 2$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۴

در ابتدا از دو طرف معادله، لگاریتم در مبنای ۵ می گیریم:

$$\sqrt{x}^{(-1+\log_5^x)} = 5 \xrightarrow{\log_5} \log_5 \sqrt{x}^{(-1+\log_5^x)} = \log_5^5 \Rightarrow (-1+\log_5^x) \log_5 \sqrt{x} = \log_5^5$$

$$\Rightarrow -\log_5 \sqrt{x} + \log_5^x \log_5 \sqrt{x} = 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \log_5^x + \frac{1}{2} (\log_5^x)^2 = 1 \xrightarrow{\times 2} (\log_5^x)^2 - (\log_5^x) - 2 = 0$$

$$\log_5^x = t \xrightarrow{\text{حل معادله درجه دوم بر حسب } t} t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow \log_5^x = 2 \Rightarrow x = 25 \\ t = -1 \Rightarrow \log_5^x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{5} \end{cases} \xrightarrow{x_1 > x_2} \log_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{5}} = \log_{\frac{1}{5}}^{\frac{25}{5}} = -2$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۵

قیمت اتومبیل بعد از n سال از رابطه $A_n = A_0 \left(\frac{75}{100}\right)^{\frac{n}{4}}$ بدست می‌آید. زیرا هر ۴ سال ۲۵ درصد کاهش می‌یابد یعنی ۷۵٪ آن می‌ماند.

$$\frac{1}{5}A = A_0 \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{4}} \Rightarrow \frac{1}{5} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{4}} \Rightarrow \log_{\frac{3}{4}} \frac{1}{5} = \frac{n}{4}$$

$$\Rightarrow n = 4 \log_{\frac{3}{4}} \frac{1}{5} \Rightarrow n = 4 \times \frac{-\log 5}{\log 3 - \log 4} = \frac{4 \log 5}{\log 4 - \log 3}$$

$$\Rightarrow n = \frac{4(1 - \log 2)}{2 \log 2 - \log 3} \Rightarrow n = \frac{4 \times 0.7}{0.6 - 0.47} \Rightarrow n = \frac{2.8}{0.13} = \frac{280}{13} \approx 21.5$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۶

نکته: اگر $a > 0$ و $a \neq 1$ باشد، آنگاه: $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$

با ساده کردن طرف چپ معادله داریم:

$$\frac{2^{x-2} + 2^{x+1} + 2^{x+2}}{5^x + 5^{x-1} + 5^{x+1}} = \frac{2^x + 2^x \times 2 + 2^x \times 2^2}{5^x + \frac{5^x}{5} + 5^x \times 5} = \frac{2}{31} \Rightarrow \frac{2^x \left(\frac{1}{5} + 2 + 4\right)}{5^x \left(1 + \frac{1}{5} + 5\right)} = \frac{2}{31} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x \left(\frac{4}{31}\right) = \frac{2}{31}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x \left(\frac{125}{124}\right) = \frac{2}{31} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{2}{31} \times \frac{124}{125} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{8}{125} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \Rightarrow x = 3$$

$$A = (\sqrt[3]{x+1})^{x^2-3} \xrightarrow{x=3} A = (\sqrt[3]{4})^6 = 4^2 \Rightarrow A = 16$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$\text{نکته: } \log_b a^n = n \log_b a; (a, b > 0, b \neq 1)$$

$$\text{نکته: } \log_a a = 1; (a > 0, a \neq 1)$$

ابتدا مقدار a را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = 3 - a \log_{\frac{x}{2}} (5) \xrightarrow{f(42)=-1} -1 = 3 - a \log_{\frac{x}{2}} 16 \Rightarrow -1 = 3 - a \log_{\frac{x}{2}} 4^2 \Rightarrow -1 = 3 - a(2) \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

اکنون با جایگذاری مقدار a خواهیم داشت: $f(x) = 3 - 2 \log_{\frac{x}{2}} (5)$ ، پس:

$$f(138) = 3 - 2 \log_{\frac{x}{2}} (64) = 3 - 2 \log_{\frac{x}{2}} 4^3 = 3 - 2(3) = -3$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۷

۱۳۸

نکته: اگر a و b اعداد حقیقی و مثبت و $a \neq 1$ باشد، آنگاه: $\log_a b^n = n \log_a b$

نکته: اگر a, b و c اعداد حقیقی و مثبت و $a \neq 1$ باشد، آنگاه:

$$1) \log_a bc = \log_a b + \log_a c \quad 2) \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

نکته: اگر a, b و c اعداد حقیقی و مثبت و $a \neq 1$ و $c \neq 1$ باشند، آنگاه:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (c = 10 \Rightarrow \log_a b = \frac{\log b}{\log a})$$

با توجه به نکات بالا داریم:

$$\log_2 5\sqrt{3} = \frac{\log 5\sqrt{3}}{\log 2} = \frac{\log 5 + \log 3^{\frac{1}{2}}}{\log \frac{10}{5}} = \frac{\log 5 + \frac{1}{2} \log 3}{\log 10 - \log 5} = \frac{\log 5 + \frac{1}{2} \log 3}{1 - \log 5} = \frac{0.7 + 0.24}{1 - 0.7} = \frac{0.94}{0.3} = \frac{94}{30} = \frac{47}{15}$$

(دقت کنید: $\log 2 = 1 - \log 5$)

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۹

نکته: دامنه تابع با ضابطه $y = \log_a x$ ($a \neq 1$)، مجموعه اعداد حقیقی مثبت و برد آن $\mathbb{R}$ است.

ابتدا دامنه تابع g را محاسبه می‌کنیم. عبارت $1-x$ در مخرج کسر و زیر رادیکال است، پس باید مثبت باشد:

$$1-x > 0 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow D_g = (-\infty, 1)$$

پس دامنه تابع f نیز به صورت $(-\infty, 1)$ است. ورودی تابع لگاریتم باید مثبت باشد، پس:

پس برای آنکه دامنه دو تابع f و g برابر باشد، می‌بایست a عددی منفی بوده و $\frac{-b}{a} = 1$ ؛ یعنی $b = -a$ و داریم: $f(x) = \log_2(ax-a)$

دو تابع f و g یکدیگر را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع می‌کنند، پس:

$$f(-3) = g(-3) \Rightarrow \log_2(-3a-a) = \frac{1}{\sqrt{1+3}} \Rightarrow \log_2(-4a) = \frac{1}{2} \Rightarrow -4a = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow -4a = \sqrt{4} \Rightarrow -4a = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow a \times b = -\frac{1}{4}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۰

نکته: اگر $a, b > 0$ و $a \neq 1$ باشد، آنگاه: $a^{\log_a b} = b$

برای اینکه $\log_2 x$ تعریف شده باشد باید $x > 0$ باشد، با استفاده از نکته بالا داریم:

$${}_5^{\log_2 x} = {}_5^{\log_2 x} = {}_5^{\frac{1}{2} \log_2 x} = {}_5^{\log_2 \sqrt{x}} = \sqrt{x}^{\log_2 5} = \sqrt{x}$$

بنابراین باید نمودار $y = \sqrt{x}$ را با شرط $x > 0$ رسم کنیم:

راه حل دوم:

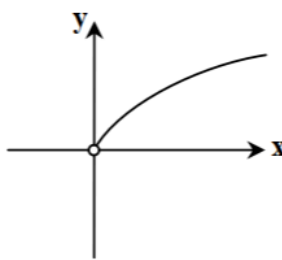
نکته: $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ ($a, b, c > 0, c \neq 1$)

$${}_5^{\log_2 x} = x^{\log_2 5} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x}, x > 0$$

با توجه به دامنه $\log_2 x$ باید $x > 0$ باشد.

ادامه راه حل مانند راه حل اول است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)



۱۴۱

نکته: دامنه تابع با ضابطه $y = a^x$ مجموعه اعداد حقیقی و برد آن $(0, +\infty)$ است.

برد تابع $f(x) = 3^{-x+a} + b$ به صورت $y > -2$ است، پس

$b = -2$ یعنی $f(x) = 3^{-x+a} - 2$. این تابع از نقطه $(0, 7)$ می‌گذرد، پس:

$$f(0) = 7 \Rightarrow 7 = 3^a - 2 \Rightarrow 3^a = 9 \Rightarrow a = 2$$

یعنی $f(x) = 3^{-x+2} - 2$. برای یافتن محل تلاقی این تابع با محور طول‌ها، داریم:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 3^{-x+2} - 2 = 0 \Rightarrow 3^{-x} \times 3^2 = 2 \Rightarrow \frac{1}{3^x} = \frac{2}{9} \Rightarrow 3^x = \frac{9}{2} \Rightarrow 3^x = 4.5 \Rightarrow x = \log_3 4.5$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۲

نکته ۱: $\log_{b^m} a^n = \frac{n}{m} \log_b a$

نکته ۲: $\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$

نکته ۳: $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$

نکته ۴: $\log 5 = 1 - \log 2$

نکته ۵: $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

با توجه به ویژگی‌های لگاریتم داریم:

$$\log_{\sqrt[3]{35}} (14)^5 = \log_{\frac{1}{35^{\frac{1}{3}}}} (14)^5 = \frac{5}{\frac{1}{3}} \log_{35} 14 = 15 \times \frac{\log(14)}{\log(35)} = 15 \times \frac{\log(2 \times 7)}{\log(5 \times 7)}$$

$$= 15 \times \frac{\log 2 + \log 7}{\log 5 + \log 7} = 15 \times \frac{0.3 + 0.8}{0.7 + 0.8} = 15 \times \frac{1.1}{1.5} = 15 \times \frac{11}{15} = 11$$

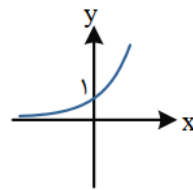
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۳

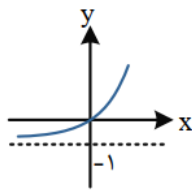
$$f(x) = \frac{2}{(2^x - 1)(2^x + 1)} + \frac{1}{2^x + 1} = \frac{2 + 2^x - 1}{(2^x - 1)(2^x + 1)} = \frac{2^x + 1}{(2^x - 1)(2^x + 1)} = \frac{1}{2^x - 1}$$

توجه کنید که:

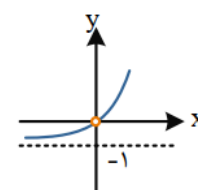
بنابراین $g(x) = \frac{1}{f(x)} = 2^x - 1$, $x \neq 0$ ، در نتیجه نمودار تابع $g = \frac{1}{f}$ به صورت زیر است.



$$y = 2^x$$



$$y = 2^x - 1$$



$$y = 2^x - 1, x \neq 0$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۴

$$f(x) = 2^x (2^k - 2^2) + 2^k = (2^k - 4)2^x + 2^k$$

توجه کنید که:

چون تابع $y = 2^x$ اکیداً صعودی است، ولی تابع f اکیداً نزولی است، پس $2^k - 4$ باید عددی منفی باشد، بنابراین:

$$2^k - 4 < 0 \Rightarrow 2^k < 4 \Rightarrow k < 2$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۵

فرض کنید در یک دوره زمانی جرم ماده $\frac{2}{3}$ برابر می‌شود. اگر m گرم از این ماده موجود باشد، آن‌گاه جرم این ماده در دوره‌های زمانی مختلف مطابق جدول زیر خواهد بود:

دوره زمانی	۱	۲	۳	n
جرم پس از دوره	$\frac{2}{3}m$	$(\frac{2}{3})^2 m$	$(\frac{2}{3})^3 m$	$(\frac{2}{3})^n m$

بنابراین پس از n سال جرم باقی‌مانده برابر $(\frac{2}{3})^n \times 300$ خواهد بود، در نتیجه:

$$(\frac{2}{3})^n \times 300 < 10 \Rightarrow (\frac{2}{3})^n < \frac{1}{30} \Rightarrow \log(\frac{2}{3})^n < \log(\frac{1}{30})$$

$$\Rightarrow n \log \frac{2}{3} < -\log 30 \Rightarrow n(\log 2 - \log 3) < -\log 3 - 1$$

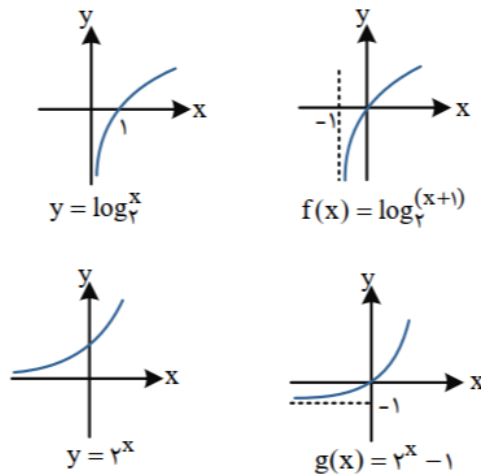
$$\Rightarrow n > \frac{1 + \log 3}{\log 3 - \log 2} \Rightarrow n > \frac{1 + 0.5}{0.5 - 0.3} = 7.5$$

بنابراین باید بیش از $7.5 \times 20 = 150$ سال طی شود تا جرم ماده کمتر از ۱۰ گرم شود، یعنی حداقل باید ۱۵۱ سال طی شود.

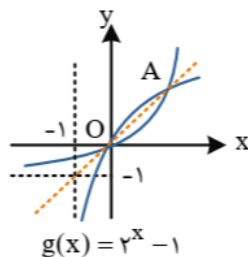
(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۶

به نمودار این توابع توجه کنید:



بنابراین نمودار توابع f و g مطابق شکل زیر یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند که یکی مبدأ مختصات و دیگری نقطه A است.



توجه کنید که این دو تابع وارون یکدیگرند و نقاط تقاطع نمودارهای آن‌ها روی خط $y = x$ قرار دارد. می‌توان حدس زد که نقطه A نقطه $(1,1)$ است:

$$f(1) = \log_2(1+1) = 1, \quad g(1) = 2^1 - 1 = 1$$

بنابراین:

$$OA = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۷ توجه کنید که:

$$\log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{2}} = \log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{2}} < \log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{25}} \Rightarrow \log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{2}} < \log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{25}}$$

$$\log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{2}} = \log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{2}} < \log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{25}} \Rightarrow \log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{2}} < \log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{25}}$$

$$\log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{2}} < \log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{25}} \Rightarrow 2 < \log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{25}}$$

بنابراین $\log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{25}}$ از بقیه اعداد داده شده بزرگتر است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۸ از طرفین معادله داده شده در مبنای ۲ لگاریتم می‌گیریم.

$$2^{x^2} = 3^{x^2} \Rightarrow \log_2^{x^2} = \log_2^{3^{x^2}} \Rightarrow x^2 \log_2^2 = x^2 \log_2^3 \Rightarrow x^2 = x^2 \log_2^3 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_2^3 \end{cases}$$

$$\alpha = \log_2^3 \Rightarrow 2^{2^\alpha} = 2^{2^{\log_2^3}} = 2^3 = 2^7$$

بنابراین:

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$\log_2^x + m \log_2^x = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \log_2^x + 2m \log_2^x = 2 \Rightarrow \log_2^x + \frac{6m}{\log_2^x} = 4$$

۱۴۹ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

اگر فرض کنیم $t = \log_2^x$ معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$t + \frac{6m}{t} = 4 \Rightarrow t^2 - 4t + 6m = 0$$

برای این که معادله بالا جواب نداشته باشد، باید:

$$\Delta < 0 \Rightarrow 16 - 24m < 0 \Rightarrow m > \frac{2}{3} \Rightarrow m \in \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۵۰ توجه کنید که:

$$\log_2^{\frac{1}{a}} = a \Rightarrow \log_2^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \log_2^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a}$$

$$\log_2^{\frac{1}{a}} + \log_2^{\frac{1}{a}} = \frac{2}{a} \Rightarrow \log_2^{\frac{1}{a}} + 1 = \frac{2}{a} \Rightarrow \log_2^{\frac{1}{a}} = \frac{2}{a} - 1$$

$$\log_2^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \log_2^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} (\log_2^{\frac{1}{a}} + \log_2^{\frac{1}{a}}) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(2 + \frac{2}{a} - 1\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(1 + \frac{2}{a}\right) = \frac{a+2}{\sqrt[3]{2}a}$$

بنابراین:

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۵۱ **تک‌پله:** ابتدا با استفاده از داده‌های مسئله سعی می‌کنیم مقدار x را پیدا کنیم:

$$1 < A + B < 2 \Rightarrow 1 < \log_2^{(x-1)} + \log_2^2 < 2 \Rightarrow 1 < \log_2^{2(x-1)} < 2 \Rightarrow \log_2^2 < \log_2^{2(x-1)} < \log_2^4 \Rightarrow 2 < 2x - 3 < 4$$

$$\Rightarrow 5 < 2x < 7 \Rightarrow \frac{5}{2} < x < \frac{7}{2} \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = 3$$

در نتیجه داریم:

$$\log_{(2x-4)}^{\left(\frac{1}{x}\right)} = \log_2^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \log_2^{2^{-1}} = -1$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۵۲



دقت به این نکته $\log_c^b = b \log_c^a$ کلید حل مسئله است.

تک پله: اگر ریشه‌های معادله را α و β فرض کنیم، مجموع مربعات ریشه‌ها برابر است با:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P$$

حال مقادیر S و P را پیدا کرده و جایگذاری می‌کنیم پس:

$$S = \frac{-b}{a} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{3^2 \log_9^{169}} - 21} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{9 \log_9^{169}} - 21} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{169 \log_9^9} - 21} = \sqrt[3]{13 - 21} = \sqrt[3]{-8} = -2 \quad \text{و} \quad P = \frac{c}{a} = -4$$

در نتیجه داریم:

$$S^2 - 2P = (-2)^2 - 2(-4) = 12$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۵۳



از تغییر مبنا استفاده کنید و لگاریتم‌ها را به مبنای ۵ ببرید.

تک پله: می‌دانیم $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$ ، پس با توجه به اینکه $\log_5^{\frac{1}{y}} = \frac{1}{y}$ است، نتیجه می‌گیریم $\log_5^2 = y$ می‌باشد. حال با استفاده از قاعده

تغییر مبنا، $\log_{125}^{100}$ را به مبنای ۵ می‌بریم:

$$\log_{125}^{100} = \frac{\log_5^{100}}{\log_5^{125}} = \frac{\log_5^{2 \times 5^2}}{\log_5^{3 \times 5^3}} = \frac{\log_5^2 + \log_5^2}{\log_5^3 + \log_5^3} = \frac{2 \log_5^2 + 2 \log_5^2}{3 \log_5^3 + 1} = \frac{2y + 2}{3x + 1}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۵۴

پله اول: طبق گفته سوال داریم:

$$\frac{2}{\log_7^a} = \frac{4}{\log_7^b} = \frac{6}{\log_7^c} \rightarrow \frac{\log_7^a}{2} = \frac{\log_7^b}{4} = \frac{\log_7^c}{6} = m \rightarrow \begin{cases} \log_7^a = 2m \rightarrow a = 7^{2m} \\ \log_7^b = 4m \rightarrow b = 7^{4m} \\ \log_7^c = 6m \rightarrow c = 7^{6m} \end{cases}$$

$$abc = 64 \rightarrow 7^{2m} \times 7^{4m} \times 7^{6m} = 64 \rightarrow 7^{12m} = 2^6 \rightarrow 12m = 6 \rightarrow m = \frac{1}{2}$$

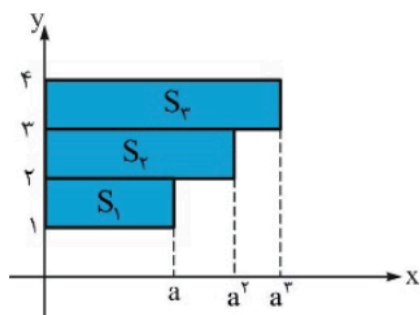
پله دوم: بنابراین حاصل عبارت $\log_7^a \times \log_7^b \times \log_7^c$ برابر است با:

$$\log_7^a \times \log_7^b \times \log_7^c = 2m \times 4m \times 6m = 48m^3 = 48 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 6$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۵۵

پله اول: چون یک رأس هر مستطیل روی نمودار تابع $f(x) = \log_a^x$ و یک ضلع آن روی محور y ها قرار دارد، با تلاقی قرار دادن تابع $f(x)$ و y مربوطه، می‌توانیم x مربوطه به هر رأس مستطیل را بدست آوریم:



$$\log_a^x = 1 \Rightarrow x = a$$

$$\log_a^x = 2 \Rightarrow x = a^2$$

$$\log_a^x = 3 \Rightarrow x = a^3$$

پله دوم:

$$S_3 = 3 \cdot a + S_1 \Rightarrow (a^3 \times 1) = 3 \cdot a + (a \times 1) \Rightarrow a^3 - a - 3 \cdot a = 0 \Rightarrow (a - 6)(a + 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \checkmark \\ a = -5 \text{ غق} \end{cases}$$

$$S_3 = a^3 \times 1 \Rightarrow S_3 = (6)^3 \Rightarrow S_3 = 216$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۵۶

پله اول: ابتدا طرفین وسطین می‌کنیم و عبارت را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$\log_x^{(xy)} = \log_y^{(x\sqrt{y^5})} = \log_x^x + \log_y^y = \log_x^x + \log_y^{\sqrt{y^5}} = 1 + \log_x^y = \log_x^x + \frac{5}{2} \rightarrow \log_x^y = \log_x^x + \frac{3}{2}$$

پله دوم: حال باید معادله را با فرض $t = \log_x^y$ حل کنیم تا مقادیر آن به دست آید بنابراین داریم:

$$t = \frac{1}{t} + \frac{3}{2} \xrightarrow{\times(t)} t^2 - \frac{3}{2}t - 1 = 0$$

$$\Delta = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 4(1)(-1) = \frac{25}{4} \rightarrow t_{1,2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}}{2}$$

$$t_1 = \frac{\frac{3}{2} + \frac{5}{2}}{2} = 2 \Rightarrow \log_x^y = 2 \rightarrow y = x^2$$

$$t_2 = \frac{\frac{3}{2} - \frac{5}{2}}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \log_x^y = -\frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow y\sqrt{x} = 1$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۵۷

به جای x عبارت $\log_{10}^x$ قرار داده و از ویژگی‌های لگاریتم استفاده کنید.

سرنخ**تک پله:**

$$x + \log(\Delta^x - 2) = x \log 2 + \log 24$$

$$\log 10^x + \log(\Delta^x - 2) = \log 2^x + \log 24$$

$$\log 10^x (\Delta^x - 2) = \log(2^x \times 24) \rightarrow 10^x (\Delta^x - 2) = 2^x \times 24$$

$$\Delta^x (\Delta^x - 2) = 24 \xrightarrow{\Delta^x = t > 0} t(t - 2) = 24 \rightarrow t^2 - 2t - 24 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 6 \text{ قق} \rightarrow t = \Delta^x = 6 \\ t = -4 < 0 \text{ غق} \end{cases}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۵۸

پله اول: ابتدا طرف راست معادله را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{\log_{\epsilon}^{24}}{\log_{\epsilon}^{\epsilon}} - \frac{\log_{\epsilon}^{144}}{\log_{\epsilon}^{\epsilon}} &= \log_{\epsilon}^{24} \times \log_{\epsilon}^{24} - (\log_{\epsilon}^{144} \times \log_{\epsilon}^{\epsilon}) = (\log_{\epsilon}^{24})^2 - (\log_{\epsilon}^{24 \times \epsilon} \times \log_{\epsilon}^{\epsilon}) = (\log_{\epsilon}^{\epsilon \times 24})^2 - (\log_{\epsilon}^{\epsilon \times 24} \times \log_{\epsilon}^{\epsilon}) \\ &= (\log_{\epsilon}^{\epsilon} + \log_{\epsilon}^{24})^2 - ((\log_{\epsilon}^{\epsilon} + \log_{\epsilon}^{24})(\log_{\epsilon}^{\epsilon})) \\ &= (1 + \log_{\epsilon}^{\epsilon})^2 - (2 + \log_{\epsilon}^{\epsilon})(\log_{\epsilon}^{\epsilon}) = 1 + 2\log_{\epsilon}^{\epsilon} + (\log_{\epsilon}^{\epsilon})^2 - 2\log_{\epsilon}^{\epsilon} - (\log_{\epsilon}^{\epsilon})^2 = 1 \end{aligned}$$

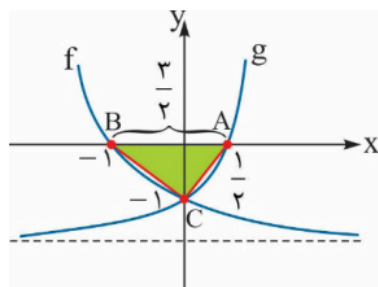
پله دوم: بنابراین معادله داده شده به صورت زیر است:

$$\log_x^{(x^2-12)} = 1 \Rightarrow x^2 - 12 = x \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \checkmark \\ x=-3 \text{ غق} \end{cases}$$

$$\log_x^{(x+4)} = \log_{\epsilon}^1 = \log_{\epsilon}^{24} = \log_{\epsilon}^{24} = \frac{3}{2} \log_{\epsilon}^{24} = \frac{3}{2}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۵۹

با توجه به تعریف تابع نمایی مشخص است که تابع $f(x)$ اکیدا نزولی و تابع $g(x)$ اکیدا صعودی است.

$$f(0) = g(0) \rightarrow 1 + b = 1 + c \rightarrow b = c$$

$$f(-1) = 0 \rightarrow b = -2 = c$$

$$g(x) = 4^x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow A\left(\frac{1}{2}, 0\right), B(-1, 0)$$

$$g(0) = 4^0 - 2 = -1 \rightarrow c(0, -1)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \times 1}{2} = \frac{3}{4}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۶۰

به طرفین رابطه $a^2 + 9b^2 = 10ab$ جمله $6ab$ را اضافه می‌کنیم:

$$a^2 + 6ab + 9b^2 = 10ab \Rightarrow (a+3b)^2 = 10ab \Rightarrow a+3b = \sqrt{10ab}$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{a+3b}{4}\right) = \log\frac{\sqrt{10ab}}{4} = \log\sqrt{ab} = \log(ab)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\log ab) = \frac{1}{2}(\log a + \log b) = \frac{\log a + \log b}{2}$$

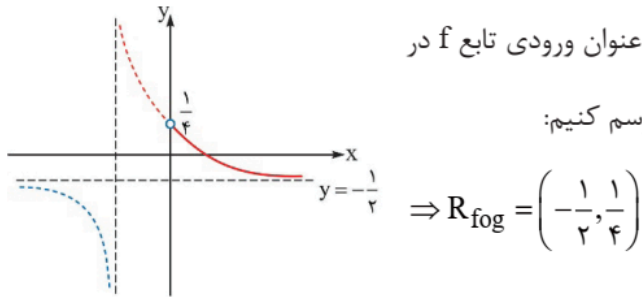
بنابراین $\log\left(\frac{a+3b}{4}\right)$ واسطه حسابی دو جمله $\log a$ و $\log b$ است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۶۱

بُرد تابع $y = 2^x$ برابر $(0, +\infty)$ است که در تابع fog، بازه $(0, +\infty)$ به عنوان ورودی تابع f در

نظر گرفته می‌شود. پس باید تابع $f(x) = \frac{1-x}{2x+4}$ را با دامنه $(0, +\infty)$ رسم کنیم:



(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۶۲

نکته: $a = b^x \Leftrightarrow \log_b a = x$ ($a, b > 0, b \neq 1$)

نکته: $\log_b a^n = n \log_b a$

با توجه به نکات بالا و معادله داده شده، داریم:

$$(2^2)^{x+1} + 2^{2x+3} = 60 \Rightarrow 2^{2x+2} + 2^{2x+3} = 60 \Rightarrow 4 \times 2^{2x} + 8 \times 2^{2x} = 60 \Rightarrow 12 \times 2^{2x} = 60 \Rightarrow 2^{2x} = 5 \Rightarrow 2x = \log_2 5$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \log_2 5 = \log_2 \sqrt{5}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۶۳

نکته: $\log_c a + \log_c b = \log_c ab$

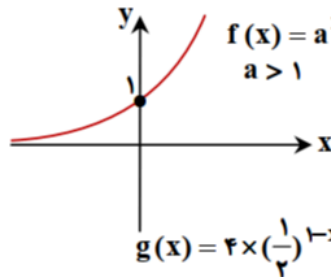
نکته: $\log_b a^n = n \log_b a$, $\log_a a = 1$

با استفاده از نکات بالا، داریم: $\log 4 + \log 25 = \log 4 \times 25 = \log 100 \Rightarrow b + 2 + 3a - 1 = 2 \Rightarrow b + 3a = 1$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۶۴

نکته: نمودار تابع نمایی $f(x) = a^x$ با شرط $a > 1$ به صورت زیر است: $f(x) = a^x$ $a > 1$



ابتدا ضابطه تابع g را بر حسب f می‌نویسیم:

$$g(x) = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} - 1 \Rightarrow g(x) = 2^2 \times 2^{x-1} - 1 \Rightarrow g(x) = 2^{x+1} - 1 = f(x+1) - 1$$

پس کافی است نمودار $f(x) = 2^x$ را ابتدا در امتداد محور xها یک واحد به سمت چپ و سپس یک واحد در راستای محور yها به سمت پایین انتقال دهیم.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$\log_b a = c \Leftrightarrow a = b^c \quad \text{نکته}$$

۱۶۵

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \quad \text{نکته}$$

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b, \quad \log_b a^n = n \log_b a \quad \text{نکته}$$

هر سال ۲۵ درصد از قیمت دستگاه کم می‌شود، یعنی قیمت دستگاه در هر سال ۷۵ درصد قیمت سال قبل آن است. بنابراین اگر قیمت اولیه دستگاه را A_0 بنامیم، قیمت دستگاه پس از t سال استفاده از رابطه $f(t) = A_0 \times (0.75)^t$ به دست می‌آید. اگر پس از t سال قیمت این

$$A_0 (0.75)^t = \frac{A_0}{4} \Rightarrow (0.75)^t = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \log_{0.75} \frac{1}{4} = \frac{\log \frac{1}{4}}{\log 0.75} = \frac{-\log 2^2}{\log 3 - \log 2^2} \quad \text{یعنی:}$$

$$= \frac{-2 \log 2}{\log 3 - 2 \log 2} = \frac{-2 \times 0.3}{0.48 - 2 \times 0.3} = \frac{-0.6}{-0.12} = \frac{60}{12} = 5$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$\text{می‌دانیم} \begin{cases} f \circ f^{-1}(x) = x \rightarrow x \in D_{f^{-1}} \text{ یا } x \in R_f \\ f^{-1} \circ f(x) = x \rightarrow x \in D_f \end{cases}$$

۱۶۶

$$\begin{cases} D_f = R \\ R_f = (-\infty, 1) \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2 - 3f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) \Rightarrow x^2 - 2 - 3x = x \Rightarrow x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$\Delta = 16 + 8 = 24 \Rightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{2} = 2 \pm \sqrt{6} \xrightarrow{(-\infty, 1)} x = 2 - \sqrt{6}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

ابتدا $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

۱۶۷

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\pi}{3x-1} = \frac{\pi}{2^+} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$$

حالا به سراغ محاسبه $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(f(x))$ می‌رویم:

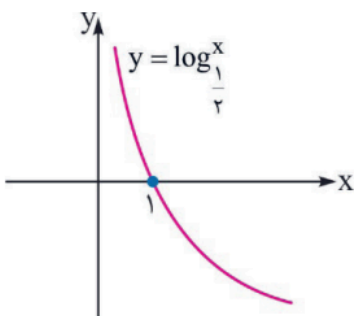
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \left(\log_{\frac{1}{2}} \tan x \right)$$

در ضمن می‌دانیم وقتی که $x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ آنگاه $\tan x \rightarrow +\infty$ ، پس:

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \left(\log_{\frac{1}{2}} \tan x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\log_{\frac{1}{2}} x \right)$$

حالا با توجه به نمودار $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ داریم:

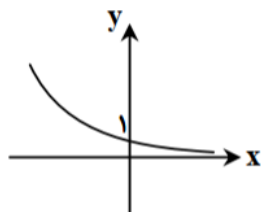
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\log_{\frac{1}{2}} x \right) = -\infty$$



(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۶۸

نکته: نمودار تابع نمایی $f(x) = a^x$ با شرط $0 < a < 1$ به صورت روبه‌رو است:



نکته: اگر $a > 1$ ، داریم:

$$x \geq y \Leftrightarrow a^x \geq a^y$$

با توجه به نکات بالا و اینکه تابع نمایی داده‌شده نزولی است، داریم:

$$f(x) = (2-3m)^x \Rightarrow 0 < 2-3m < 1$$

$$\Rightarrow -1 < 3m-2 < 0 \Rightarrow 1 < 3m < 2 \Rightarrow \frac{1}{3} < m < \frac{2}{3} \Rightarrow 1 + \frac{1}{3} < m+1 < 1 + \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{4}{3} < m+1 < \frac{5}{3} \quad (*)$$

$$(m+1)^{x^2-x} \leq (m+1)^{12-2x} \xrightarrow{m+1 > 1, (*)} x^2 - x \leq 12 - 2x \Rightarrow x^2 + x - 12 \leq 0 \Rightarrow (x+4)(x-3) \leq 0 \Rightarrow -4 \leq x \leq 3$$

بنابراین x می‌تواند ۳ عدد طبیعی (۱، ۲ و ۳) را اختیار کند.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۶۹

نکته ۳: $\log_c a = \log_c b \Leftrightarrow a = b$

نکته ۲: $\log_a a = 1$

نکته ۱: $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$

$$\text{نکته ۴: } \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

نکته ۵: $\log_c a^n = n \log_c a$

ابتدا معادله داده‌شده را حل می‌کنیم:

$$\log_7(x+2) = \log_7(4-x) + 1 \Rightarrow \log_7(x+2) = \log_7(4-x) + \log_7 7$$

$$\Rightarrow \log_7(x+2) = \log_7(7(4-x)) \Rightarrow x+2 = 8-2x \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

$$\log_8 \sqrt[3]{x} = \log_8 \sqrt[3]{2} = \log_8 2^{\frac{1}{3}} = \frac{\log_8 2}{\log_8 2^3} = \frac{\frac{1}{3} \log_8 2}{3 \log_8 2} = \frac{1}{9}$$

بنابراین:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۰

از روی نمودار واضح است که نمودار تابع نمایی دو واحد پایین‌تر آمده است پس $b = -2$ می‌باشد از طرفی نقطه $(4, 0)$ روی نمودار قرار دارد با جایگذاری این نقطه روی تابع داریم:

$$f(x) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-(x+a)} \longrightarrow 0 = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-(4+a)}$$

$$\longrightarrow 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-(4+a)} = 2^{4+a}$$

$$1 = 4 + a \Rightarrow a = -3$$

$$f(x) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-(x-3)} \Rightarrow f(a-b) = f(-1) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = -2 + \frac{1}{16} = -\frac{31}{16}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۱

اول باید سمت راست را ساده کنیم:

$$2 - \frac{\log 9}{\log 4} = 2 - \frac{2 \log 3}{2 \log 2} = 2 - \frac{\log 3}{\log 2} = \log_2 4 - \log_2 3 = \log_2 \frac{4}{3}$$

حالا معادله اصلی را می‌نویسیم:

$$\log_2(1 - \log_2^{\frac{4}{3}}) = \log_2^{\frac{4}{3}} \Rightarrow 1 - \log_2^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} \quad \log_2^{\frac{4}{3}} = \frac{-1}{3} \rightarrow x = 2^{\frac{-1}{3}} \rightarrow 2x = 2^{\frac{2}{3}} \quad \log_2(2x) = \log_2 2^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۲

دقت کنید که: $\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$ و $\log_c^{ab} = \log_c^a + \log_c^b$ با توجه به اتحادهای لگاریتمی بالا، داریم:

$$\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} = \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} + \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} + \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} = m \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} = m - \frac{3}{2}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} = \frac{\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}}}{\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}}} = \frac{\frac{3}{2}}{\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} + 2 \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2} + 2m - 3} = \frac{\frac{3}{2}}{2m - \frac{5}{2}} = \frac{3}{4m - 5}$$

حالا به سراغ عبارت خواسته شده می‌رویم:

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۳

در ابتدا با توجه به خاصیت $\log_a^x + \log_a^y = \log_a^{xy}$ و $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$ عبارت‌ها را ساده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \frac{2}{\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + 1} = \frac{2}{\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}} = 2 \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + 1} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}} = \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

حالا داریم:

$$\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 1 = \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \rightarrow \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow 4a = 26 \rightarrow a = 9$$

بنابراین:

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۴

پاسخ تشریحی

گام اول (تحلیل سوال و تعیین علامت اولیه): عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج همواره باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد، از آنجایی که صورت عبارت زیر رادیکال -1 است، مخرج آن باید منفی شود پس:

$$\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\log_x (1-x)) < 0 \xrightarrow[\text{جهت نامساوی عوض می‌شود}]{\text{مبنای صفر و یک}} \log_x (1-x) > \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

همواره مثبت ✓
حرکت چرخشی

$$\Rightarrow \log_x (1-x) > 1$$

گام دوم (به دست آوردن دامنه $\log_x (1-x)$): عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت و همچنین مبنا نیز مثبت و مخالف یک باشد پس:

$$\begin{cases} 1-x > 0 \Rightarrow x < 1 \\ x > 0, x \neq 1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} 0 < x < 1 \quad (*)$$

گام سوم (به دست آوردن خواسته سؤال): حال با توجه به $(*)$ نامساوی به دست آمده در گام اول را حل می‌کنیم:

$$\log_x (1-x) > 1 \xrightarrow[\text{جهت عوض می‌شود}]{*(0 < x < 1)} 1-x < x^1 \Rightarrow 1-x < x \Rightarrow 2x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \quad (**)$$

حال بین $(*)$ و $(**)$ اشتراک می‌گیریم تا خواسته سؤال به دست آید:

$$\left. \begin{matrix} 0 < x < 1 \\ x > \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\cap} \frac{1}{2} < x < 1 \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a+b = \frac{3}{2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۵

پاسخ تشریحی گام اول: نقاط $(0, -6)$ و $(1, 0)$ را در تابع f جای گذاری می کنیم:

$$f(0) = -6 \Rightarrow -6 = 2 + a \times 2^c \Rightarrow a \times 2^c = -8$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow 0 = 2 + a \times 2^{b+c} \Rightarrow \underbrace{a \times 2^c}_{-8} \times 2^b = -2$$

$$\Rightarrow 2^b = \frac{1}{4} = 2^{-2} \Rightarrow b = -2$$

$$\log_{|b|} |a \times 2^c| = \log_2 8 = 3$$

گام دوم: مقدار لگاریتم را محاسبه می کنیم:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۶

گام اول: نمودار تابع از نقطه $(5/5, 0)$ می گذرد:

$$f(0) = \frac{3^c}{a} - \frac{1}{2} = \frac{11}{2} \Rightarrow \frac{3^c}{a} = 6$$

گام دوم: با این رابطه، ضابطه تابع را بازنویسی می کنیم:

$$f(x) = \frac{3^c \times 3^{bx}}{a} - \frac{1}{2} = \left(\frac{3^c}{a}\right) 3^{bx} - \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = 6 \times 3^{bx} - \frac{1}{2}$$

گام سوم: حالا مختصات نقطه $(0, 5/5)$ را در این ضابطه جای گذاری می کنیم:

$$f(0/5) = 6 \times 3^{\frac{b}{2}} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 3^{\frac{b}{2}} = \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

گام چهارم: مقدار $f(-\frac{1}{2})$ را حساب می کنیم:

$$f(-\frac{1}{2}) = 6 \times 3^{\frac{-b}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{6}{3^{\frac{b}{2}}} - \frac{1}{2} = \frac{6}{\frac{1}{12}} - \frac{1}{2} = \frac{6}{1} - \frac{1}{2} = 71/5$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۷

گام اول: ضابطه‌های دو تابع را برابر قرار می‌دهیم:

$$\xrightarrow{f(x)=g(x)} 2^{x+1} - 9 = -2^{2-x} \Rightarrow 2(2^x) - 9 = -\frac{2^2}{2^x}$$

با در نظر گرفتن متغیر $t = 2^x$ ، معادله را بر حسب t می‌نویسیم:

$$2t - 9 = -\frac{4}{t}$$

گام دوم: معادله بالا را حل می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\times t} 2t^2 - 9t = -4 \Rightarrow 2t^2 - 9t + 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{روش روسی}} s^2 - 9s + 4 = (s-1)(s-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = 1 \\ s_2 = 4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\div 2} \begin{cases} t_1 = \frac{1}{2} \\ t_2 = 4 \end{cases}$$

گام سوم: حال مقادیر x را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2^{x_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = -1 \\ 2^{x_2} = 4 \Rightarrow x_2 = 2 \end{cases}$$

گام چهارم: با توجه به تعریف لگاریتم، β نمی‌تواند -1 باشد، پس $\alpha = -1$ و $\beta = 2$ است و داریم:

$$\log_{\beta} \alpha^{\alpha} = \log_{\beta} 1 = 0$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۸

گام اول: ابتدا دو طرف رابطه داده‌شده را معکوس می‌کنیم و با توجه به قوانین لگاریتم خواهیم داشت:

$$\log_{a^2b} a = 3 \Rightarrow \frac{1}{\log_{a^2b} a} = \frac{1}{3} \Rightarrow \log_a a^2b = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \log_a a^2 + \log_a b = \frac{1}{3} \Rightarrow \underbrace{2 \log_a a}_{=2} + \log_a b = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 2 + \log_a b = \frac{1}{3} \Rightarrow \log_a b = -\frac{5}{3} \Rightarrow \log_b a = \frac{-3}{5}$$

گام دوم: خواسته سؤال $\log_{b^3a} b$ است. اگر آن را A فرض کنیم، داریم:

$$A = \log_{b^3a} b \xrightarrow{\text{معکوس کردن طرفین}} \frac{1}{A} = \log_b b^3a \Rightarrow \frac{1}{A} = \log_b b^3 + \log_b a$$

$$\Rightarrow \frac{1}{A} = \underbrace{3 \log_b b}_{=3} + \underbrace{\log_b a}_{\substack{=-\frac{3}{5} \\ \text{(از گام قبلی)}}} \Rightarrow \frac{1}{A} = 3 - \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{1}{A} = \frac{12}{5} \Rightarrow A = \frac{5}{12}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۹

گام اول: ابتدا $a = \log_7 9$ را در رابطه $\log_{16} b = \frac{1}{\lambda}(2+a)$ جای گذاری می کنیم و پایه های لگاریتم ها را به ۲ تبدیل می کنیم:

$$\underbrace{\log_{16} b}_{\log_4 b} = \frac{1}{\lambda}(2 + \log_7 9) \xrightarrow{2=\log_2 4} \frac{1}{\cancel{4}_1} \log_2 b = \frac{1}{\cancel{\lambda}_2} \underbrace{(\log_2 4 + \log_2 9)}_{\log_2 36}$$

$$\Rightarrow \log_2 b = \frac{1}{2} \log_2 36 \Rightarrow \underbrace{2 \log_2 b}_{\log_2 b^2} = \log_2 36 \Rightarrow b^2 = 36 \xrightarrow{b>0} b = 6$$

گام دوم: حال که $b = 6$ را به دست آوردیم، خواسته سؤال برابر می شود با:

$$\log_7 (3b - 2) = \log_7 (3(6) - 2) = \log_7 16 = 4$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸۰

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا معادله درجه دوم را تشکیل می دهیم:

$$x^2 - (2 \log 2)x + k = 0$$

گام دوم: جواب های معادله بالا، α و 2α هستند؛ پس مجموع آن ها برابر 3α می شود. حالا از فرمول S استفاده می کنیم:

$$S = -\frac{b}{a} = 2 \log 2 \Rightarrow 3\alpha = 2 \log 2 \Rightarrow \alpha = \log 2$$

گام سوم: k همان حاصل ضرب جواب ها (یا P خودمان) است:

$$\Rightarrow P = \frac{c}{a} = k = (2\alpha)\alpha = 2\alpha^2 = 2(\log 2)^2$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸۱

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا در رابطه $\log_3 b$ ، به جای a عبارت $\log_9 4$ قرار می دهیم:

$$\log_3 b = 1 + \frac{3}{2} \log_9 4$$

گام دوم: حال از ویژگی های لگاریتم استفاده می کنیم. مبنای ۹ را به ۳ تبدیل می کنیم تا مقدار b به دست آید:

$$\log_3 b = 1 + \frac{3}{2} \log_{3^2} 4 = 1 + \frac{3}{2} \log_3 4 = \log_3 3 + \log_3 \sqrt[4]{4^3} = \log_3 3(2\sqrt{2}) \Rightarrow b = 6\sqrt{2}$$

$$\log_8 (b^2 - 8) = \log_8 (72 - 8) = \log_8 64 = 2$$

گام سوم: سراغ محاسبه رابطه خواسته شده بر حسب b می رویم:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸۲

از آنجایی که $\log_b a^n = n \log_b a$ است، داریم:

$$x = \log(4^x - 90) + x \log 5$$

$$\Rightarrow (1 - \log 5)x = \log(4^x - 90) \xrightarrow{\log 5 + \log 2 = 1} (\log 2)x = \log(4^x - 90)$$

مجدداً از این ویژگی استفاده می کنیم و داریم:

$$\log 2^x = \log(4^x - 90) \Rightarrow 2^x = 4^x - 90 \Rightarrow 4^x - 2^x - 90 = (2^x - 10)(2^x + 9) = 0 \xrightarrow{2^x > 0} 2^x = 10 \Rightarrow x = \log_2 10$$

یعنی $a = \log_2 10$ بین دو عدد صحیح متوالی ۳ و ۴ قرار می گیرد، پس $[a] = 3$ است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۳

ابتدا عدد خواسته شده را ساده تر می نویسیم:

$$\log_{\frac{1}{8}} \circ / 125 = \log_{\frac{1}{8}} = \log_{2 \times 2} 2^{-3} = -3 \log_{2 \times 2} 2 = \frac{-3}{\log_2 2 \times 2} = \frac{-3}{1 + \log_2 2}$$

از فرض داده شده، مقدار $\log_2 3$ را به دست می آوریم:

$$a = \frac{\log 12}{\log 18} = \frac{2 \log 2 + \log 3}{\log 2 + 2 \log 3}$$

صورت و مخرج را بر $\log 2$ تقسیم می کنیم:

$$a = \frac{2 + \log_2 3}{1 + 2 \log_2 3} \Rightarrow \log_2 3 = \frac{2 - a}{2a - 1}$$

پس جواب برابر است با:

$$\log_{\frac{1}{8}} \circ / 125 = \frac{-3}{1 + \log_2 3} = \frac{-3}{1 + \frac{2-a}{2a-1}} = \frac{-3(2a-1)}{a+1} = \frac{3-6a}{a+1}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۴

از قوانین لگاریتم استفاده می کنیم تا پس از ساده کردن، a و b را به هم ربط دهیم:

$$a = \log_7 42 = \log_7 2 \times 21 = \log_7 2 + \log_7 21 = 1 + \log_7 21 \Rightarrow \log_7 21 = a - 1$$

$$b = \log_{21} 3 = \log_7 3 \times \log_{21} 7 = \log_7 3 \times \left(\frac{1}{a-1} \right) \Rightarrow \log_7 3 = b(a-1) \Rightarrow \log_7 2 = \frac{1}{b(a-1)}$$

حال حاصل $\log_9 8$ را حساب می کنیم:

$$\log_9 8 = \log_{7^2} 2^3 = \frac{3}{2} \log_7 2 = \frac{3}{2b(a-1)}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۵

ابتدا از طرفین معادله داده شده، در مبنای 10 لگاریتم می گیریم تا معادله درجه دوم بسازیم:

$$x^2 - x = \log_{10}^{\Delta} = \log \Delta \Rightarrow x^2 - x - \log \Delta = 0$$

در این معادله درجه دوم $S = \alpha + \beta = 1$ و $P = \alpha\beta = -\log \Delta$ است، پس داریم:

$$A = (\alpha + \beta) + (\alpha\beta) = S + P = 1 - \log \Delta = \log 2$$

$$100^A = 100^{\log 2} = 2^{\log 100} = 2^2 = 4$$

حال با استفاده از ویژگی $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ حاصل 100^A را حساب می کنیم:

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۶

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |\cos x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq t \leq 0 \quad \text{برد تابع} \quad \begin{cases} t^2 \rightarrow y_{\min} = 3^{-1} = \frac{1}{3} \\ y_{\max} = 3^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow b - a = \frac{2}{3}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۷

چون دو تابع نسبت به محور X متقارن هستند داریم:

$$f(1) = -42 \Rightarrow g(1) = 42, g(0) = -\frac{21}{4} \Rightarrow f(0) = \frac{21}{4} \quad \frac{f(1) = -42, f(0) = \frac{21}{4}}{f(1) = -42, f(0) = \frac{21}{4}} > f(1) = 6 - 3 \times 2^{a+b} = -42 \Rightarrow 48 = 3 \times 2^{a+b} \Rightarrow 16 = 2^{a+b} *$$

$$f(0) = 6 - 3 \times 2^a = \frac{21}{4} \Rightarrow \frac{21}{4} = 3 \times 2^a \Rightarrow \frac{1}{4} = 2^a \Rightarrow 2^{-2} = 2^a \Rightarrow a = -2 \quad \frac{*, a = -2}{a = -2} > 16 = 2^{-2+b} \Rightarrow 2^2 = 2^{-2+b} \Rightarrow 4 = -2 + b \Rightarrow b = 6$$

$$a \times b = -2 \times 6 = -12$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \Rightarrow a = 2$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow 2 - 4 \times 2^b = 0 \Rightarrow 2^b = \frac{1}{4} \Rightarrow b = -1$$

$$f(x) = 2 - 4 \times 2^{x-1}$$

$$y = 2 - 4 \times 2^{x-1} \Rightarrow 4 \times 2^{x-1} = 2 - y \Rightarrow 2^{x-1} = \frac{2-y}{4} \Rightarrow x-1 = \log_2 \frac{2-y}{4}$$

$$\Rightarrow x = \log_2 \frac{2-y}{4} \Rightarrow x = \log_2 \frac{2-y}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2 \frac{2-x}{2}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸۸ با توجه به آن که $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$ داریم:

۱۸۹ می‌توانیم از طرفین فرض داده شده $\epsilon = \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ لگاریتم بگیریم و داریم:

$$\log \epsilon = \log \alpha + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \Rightarrow \log \epsilon = \log \alpha - \frac{1}{2} \times 0.3 \Rightarrow \log \epsilon + 0.15 = \log \alpha$$

اذا:

$$\log 1.4 = \log 1.0 + \frac{1.5}{1.00} \Rightarrow \frac{1.5}{1.00} = \log 1.4 - \log 1.0$$

پس به جای $\frac{1.5}{1.00}$ قرار می‌دهیم $\log 1.4$ در این صورت:

$$\log \alpha = \log \epsilon + \log 1.4 \Rightarrow \alpha = \epsilon \times 1.4 \Rightarrow \alpha = 1.4$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$\log_2 (12x - 3) = \log_2 4(4x - x^2 - 1) \Rightarrow 12x - 4x^2 - 4 = 12x - 3 \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\log_{\sqrt{3}} (11 - 4x) = \log_{\sqrt{3}} 9 = 4$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$x = \frac{2^y + 2^{1-y}}{2} \Rightarrow 2^{2y} - 2x \times 2^y + 2 = 0 \Rightarrow 2^y = x + \sqrt{x^2 - 2} \Rightarrow y = \log_2 (x + \sqrt{x^2 - 2})$$

$$\Rightarrow g(x) = +\sqrt{x^2 - 2} \Rightarrow g(10) = +\sqrt{98} = +7\sqrt{2}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$P = \frac{\log_b^{a^r b^r}}{\log_b^{b^r \sqrt{a}}} = \frac{r \log_b^a + r}{\frac{1}{r} \log_b^a + r}$$

۱۹۲ $\log_b^a = t \Rightarrow \begin{cases} P = \frac{rt+r}{\frac{1}{r}t+r} = \frac{rt+r}{t+r} \\ 1 < t \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{r} < P < r \Rightarrow [P] = 1, 2, 3, 4, 5$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹۳

تابع f را بازنویسی کرده و برد آن را به دست می آوریم.

$$f(x) = (\log^x)^2 + 2\log^x + \log^a = \underbrace{(\log^x + 1)^2}_{\geq 0} - 1 + \log^a$$

$$\rightarrow f(x) \geq \log^a - 1 \rightarrow R_f = [\log^a - 1, +\infty)$$

$$\log^a - 1 = \log^{\sqrt{a}} \rightarrow \log^a - 1 = \frac{1}{4} \log^a \rightarrow \log^a = 2 \rightarrow a = 100$$

بنابراین:

خواهیم داشت:

$$f(x) = (\log^x)^2 + 2\log^x + \log^{100} \rightarrow f(100) = (\log^{100})^2 + 2\log^{100} + \log^{100}$$

$$4 + 4 + 2 = 10 = \sqrt{a}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹۴

چون قرینه f نسبت به مبدا مختصات بر خودش منطبق است پس:

$$-f(-x) = f(x)$$

$$\rightarrow f(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow \log_{\sqrt{2}}(ax + \sqrt{4x^2 + 1}) + \log_{\sqrt{2}}(-ax + \sqrt{4x^2 + 1}) = 0 \Rightarrow$$

$$\log_{\sqrt{2}}(4x^2 + 1 - a^2x^2) = 0 \rightarrow a^2 = 4 \rightarrow a = \pm 2$$

$$x \rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} : \text{طول نقطه دو برابر} \Rightarrow y = 2 \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{ax}{\sqrt{2}} + \sqrt{x^2 + 1}\right), y^{-1}(2) = ?$$

$$\times 2 \rightarrow \text{عرض نقطه دو برابر}$$

$$a = \pm 2 \Rightarrow 2 = 2 \log_{\sqrt{2}}(\pm x + \sqrt{x^2 + 1}) \Rightarrow \pm x + \sqrt{x^2 + 1} = 2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{x^2 + 1} = 2 - x \xrightarrow{(\quad)^2} x^2 + 1 = 4 + x^2 - 4x \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

$$\sqrt{x^2 + 1} = 2 + x \xrightarrow{(\quad)^2} x^2 + 1 = 4 + x^2 + 4x \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹۵

از دو طرف معادله $\log$ می گیریم.

$$\log^{\sqrt{x}} = \log^{2 \cdot (x-a)} \rightarrow x^{\sqrt{2}} \log^{\sqrt{2}} = (x-a) \log^{2 \cdot}$$

$$\rightarrow x^{\sqrt{2}} \underbrace{\log^{\sqrt{2}}}_A - x \underbrace{\log^{2 \cdot}}_B + a \underbrace{\log^{2 \cdot}}_C = 0$$

معادله درجه دو بالا یک ریشه دارد. بنابراین $\Delta = 0$ است.

$$\Delta = 0 \rightarrow B^2 = 4AC \Rightarrow (\log^{2 \cdot})^2 - 4a \log^{\sqrt{2}} \log^{2 \cdot} = 0 \rightarrow \log^{2 \cdot} = 4a \log^{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow a = \frac{1}{4} \log^{\sqrt{2}} = \log_{16}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹۶

$$\begin{aligned} \log_6^{\sqrt{2}} \log_6^{\sqrt{18}} + \left(\log_6^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} &= \log_6^{(\sqrt{2} \times \sqrt{2})} \log_6^{\left(\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{2}}\right)} + \left(\log_6^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} \\ &= \left(\log_6^{\sqrt{2}} + \log_6^{\sqrt{2}}\right) \left(\log_6^{\sqrt{2}} - \log_6^{\sqrt{2}}\right) + \left(\log_6^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2} + \log_6^{\sqrt{2}}\right) \left(\sqrt{2} - \log_6^{\sqrt{2}}\right) + \left(\log_6^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 4 - \left(\log_6^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\log_6^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 4 \end{aligned}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

ابتدا داریم:

۱۹۷

$$\left(\log_{\frac{3}{5}}^{\sqrt{3}}\right)x^{\sqrt{2}} - (\sqrt{2} \log_{\frac{3}{5}}^{\sqrt{3}})x + \log_{\frac{3}{5}}^{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow a = \log_{\frac{3}{5}}^{\sqrt{3}}, b = -\sqrt{2} \log_{\frac{3}{5}}^{\sqrt{3}}, c = \log_{\frac{3}{5}}^{\sqrt{2}}$$

با توجه به روابط بین ریشه‌ها در معادله درجه دوم داریم:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)^{-1} = \left(-\frac{b}{c}\right)^{-1} = -\frac{c}{b} = -\frac{\log_{\frac{3}{5}}^{\sqrt{2}}}{-\sqrt{2} \log_{\frac{3}{5}}^{\sqrt{3}}} = \frac{\log_{\frac{3}{5}}^{\sqrt{2}}}{\log_{\frac{3}{5}}^{\sqrt{3}}} = \log_{\frac{3}{5}}^{\sqrt{2}} \sqrt{3}$$

بنابراین:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

ابتدا داریم:

۱۹۸

$$\log_{m^{\sqrt{2}}n} m = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\log_n m}{\log_n m^{\sqrt{2}}n} = \frac{\log_n m}{\log_n m^{\sqrt{2}} + \log_n n} = \frac{\log_n m}{\sqrt{2} \log_n m + 1} = \sqrt{2} \Rightarrow \log_n m = \sqrt{2} \log_n m + \sqrt{2} \Rightarrow \log_n m = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

حال خواسته مسئله را به دست می آوریم:

$$\log_n n^{\sqrt{2}} m = \log_n n^{\sqrt{2}} + \log_n m = \sqrt{2} \log_n n + \log_n m = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{4}{\sqrt{2}-1}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

با توجه به دامنه عبارت $\log_3(2-x)$ ، داریم:

۱۹۹

$$2-x > 0 \Rightarrow x < 2$$

حال داریم:

$$\begin{aligned} \log_3(x^{\sqrt{2}} - 4x + 4) + \log_3(2-x) &= -3 \Rightarrow \log_3(x-2)^{\sqrt{2}} + \log_3(2-x) = \log_3(2-x)^{\sqrt{2}} + \log_3(2-x) = -3 \\ \xrightarrow{2-x>0} \sqrt{2} \log_3(2-x) + \log_3(2-x) &= -3 \Rightarrow \sqrt{2} \log_3(2-x) = -3 \Rightarrow \log_3(2-x) = -\frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2-x = 3^{-\frac{3}{\sqrt{2}}} \\ \Rightarrow 2-x &= \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

حال خواسته مسئله را به دست می آوریم:

$$x = \frac{5}{3} \Rightarrow \log_3(3x+3) = \log_3 8 = \log_3 2^3 = 3$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۰ با توجه به نمودار تابع f داریم:

$$f(x) = a + \log_7(bx + c) \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 3 \Rightarrow a + \log_7 c = 3 \Rightarrow a = 3 - \log_7 c \\ f(2) = 0 \Rightarrow a + \log_7(2b + c) = 0 \Rightarrow a = -\log_7(2b + c) \end{cases}$$

حال داریم:

$$\begin{aligned} 3 - \log_7 c &= -\log_7(2b + c) \Rightarrow \log_7(2b + c) - \log_7 c = -3 \Rightarrow \log_7 \frac{2b + c}{c} = -3 \Rightarrow \frac{2b + c}{c} = 7^{-3} = \frac{1}{8} \\ \Rightarrow \frac{2b}{c} + \frac{c}{c} &= \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{2b}{c} = -\frac{7}{8} \Rightarrow \frac{b}{c} = -\frac{7}{16} \end{aligned}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۱ تابع f از نقطه $(0, 0)$ می‌گذرد، پس:

$$f(0) = 0 \Rightarrow 0 = \log_{\frac{1}{2}}(0 + b) \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} b = 0 \Rightarrow b = (0 + 2)^1 \Rightarrow b = 1$$

همچنین دامنه تابع با توجه به نمودار برابر $(-\infty, 5)$ است، پس مقدار عبارت داخل لگاریتم به ازای $x = 5$ برابر صفر می‌شود:

$$5a + b = 0 \xrightarrow{b=1} 5a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{5}$$

بنابراین ضابطه تابع به صورت $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{5}x + 1)$ بوده و مقدار خواسته شده برابر است با:

$$f(-120) = \log_{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{5} \times (-120) + 1) = \log_{\frac{1}{2}}(24 + 1) = \log_{\frac{1}{2}} 25 = \log_{\frac{1}{5}} 5^2 = 2 \log_{\frac{1}{5}} 5 = 2 \times (-1) = -2$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۲ ابتدا ضابطه f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \log_7 8x = \log_7 8 + \log_7 x = 3 + \log_7 x$$

حال داریم:

$$y_1 = 4f\left(\frac{7}{x}\right) = 4\left(3 + \log_7 \frac{7}{x}\right) = 4(3 + \log_7 7 - \log_7 x) = 4(4 - \log_7 x) = 16 - 4 \log_7 x$$

$$y_2 = a - bf(x) = a - b(3 + \log_7 x) = a - 3b - b \log_7 x$$

نمودارهای y_1 و y_2 بر هم منطبق‌اند؛ بنابراین:

$$16 - 4 \log_7 x = a - 3b - b \log_7 x \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a - 3b = 16 \end{cases} \xrightarrow{b=4} a = 28$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\frac{b}{a} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۳

ضابطه سه تابع داده شده به صورت $y_1 = (\sqrt{2})^x$ ، $y_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2})^x$ و $y_3 = (\sqrt{2})^{\frac{x}{2}} = ((\sqrt{2})^{\frac{1}{2}})^x = (\sqrt[4]{2})^x$ است؛ بنابراین پایه‌های تابع نمایی برابر $\sqrt{2}$ ، $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sqrt[4]{2}$ است.

می‌دانیم $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ ؛ پس نمودار تابع y_2 ، نزولی بوده و $y_2 = h(x)$. همچنین $1 < \sqrt[4]{2} < \sqrt{2}$ ، پس نمودار هر دو تابع y_1 و y_3 صعودی

بوده اما سرعت رشد $y_1 = (\sqrt{2})^x$ از سرعت رشد $y_3 = (\sqrt[4]{2})^x$ بیشتر است، پس:

$$y_3 = f(x) \text{ و } y_1 = g(x)$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۴

با توجه به نکته و نامعادله داده شده، داریم:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\log 4x} < 2^{-2} \log(x+3) \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{\log 4x} < \left(\frac{1}{4}\right)^{\log(x+3)} \xrightarrow{0 < \frac{1}{4} < 1} \log 4x > \log(x+3) \xrightarrow{1 > 1} 4x > x+3 \Rightarrow x > 1$$

$$\begin{cases} 4x > 0 \Rightarrow x > 0 \\ x+3 > 0 \Rightarrow x > -3 \end{cases} \xrightarrow{\cap} x > 0$$

از طرفی:

بنابراین بازه $(1, +\infty)$ جواب نامعادله است، پس $a = 1$.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۵

تابع $y = -2^{b+x}$ به اندازه a واحد به سمت بالا انتقال پیدا کرده است و نمودار $f(x) = a - 2^{b+x}$ به دست آمده است. پس با توجه به شکل، $a = 4$.

از طرفی $f(0) = 0$ ، بنابراین:

$$f(x) = 4 - 2^{b+x} \xrightarrow{f(0)=0} 4 - 2^b = 0 \Rightarrow 2^2 = 2^b \Rightarrow b = 2 \xrightarrow{\frac{a=4}{b=2}} f(x) = 4 - 2^{2+x}$$

حال می‌خواهیم $f^{-1}(a-b)$ یعنی $f^{-1}(2)$ را به دست آوریم:

$$f^{-1}(2) = k \Rightarrow f(k) = 2 \Rightarrow 4 - 2^{2+k} = 2 \Rightarrow 2^{2+k} = 2 \Rightarrow 2+k = 1 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow f^{-1}(2) = -1$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۶

طبق خواص لگاریتم، مجموع دو عبارت لگاریتمی را می‌توان به صورت ضرب آرگومان‌های آن‌ها نوشت:

$$\log_7(x^2 - x + 1) + \log_7(x+1) = 3 \Rightarrow \log_7(x^2 - x + 1)(x+1) = 3 \Rightarrow \underbrace{(x^2 - x + 1)(x+1)}_{x^2+1} = 7^3 = 8$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 = 8 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \sqrt[3]{7}$$

اکنون حاصل $\log_{\sqrt[3]{7}} x$ را به دست می‌آوریم:

$$\log_{\sqrt[3]{7}} x = \log_{\sqrt[3]{7}} \sqrt[3]{7} = 1$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۷

با جایگذاری مختصات نقاط داده شده در ضابطه تابع داریم:

$$f(0) = 2 \Rightarrow c + \log_{\Delta} b = 2 \quad (*)$$

$$f(2/4) = 0 \Rightarrow c + \log_{\Delta}(2/4a + b) = 0$$

اگر طرفین معادله پایین را از معادله بالا کم کنیم، داریم:

$$c + \log_{\Delta} b - (c + \log_{\Delta}(2/4a + b)) = 2 \Rightarrow \log_{\Delta} b - \log_{\Delta}(2/4a + b) = 2 \Rightarrow \log_{\Delta} \frac{b}{2/4a + b} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{b}{2/4a + b} = \Delta^2 = 2\Delta \Rightarrow b = 60a + 2\Delta b \Rightarrow -24b = 60a$$

$$a = -\frac{2}{\Delta}b$$

$$\text{بنابراین حاصل } \frac{a}{b} = \frac{-24}{60} = \frac{-2}{\Delta} \text{ است و داریم:}$$

حالا سراغ $f(-60)$ می‌رویم:

$$f(-60) = c + \log_{\Delta}(-60a + b) = c + \log_{\Delta}(-60 \times -\frac{2}{\Delta}b + b) = c + \log_{\Delta}(2\Delta b) = c + \log_{\Delta} b + \log_{\Delta} 2\Delta = c + \log_{\Delta} b + 2$$

$$f(-60) = 2 + 2 = 4$$

از رابطه $(*)$ می‌دانیم $c + \log_{\Delta} b = 2$ است، پس:

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۸

ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$9^x - 3^{x+1} = 3(3^{x-1} - 1) \Rightarrow 9^x - 3 \times 3^x = 3^x - 3 \Rightarrow 9^x - 4 \times 3^x + 3 = 0$$

اگر $3^x = k$ باشد، خواهیم داشت:

$$k^2 - 4k + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 3 \end{cases}$$

دو حالت وجود دارد:

$$\begin{cases} 3^{\alpha} = 1 \\ 3^{\beta} = 3 \end{cases} \Rightarrow 3^{\alpha} \times 9^{\beta} = 9$$

حالت اول:

$$\begin{cases} 3^{\alpha} = 3 \\ 3^{\beta} = 1 \end{cases} \Rightarrow 3^{\alpha} \times 9^{\beta} = 3$$

حالت دوم:

بنابراین بیشترین مقدار $3^{\alpha} \times 9^{\beta}$ برابر ۹ است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۹

$$\log_{\sqrt{2}}^{|x+1|(x+4)} = 2 \Rightarrow |x+1|(x+4) = 4$$

$$\begin{cases} x > -1 \Rightarrow (x+1)(x+4) = 4 \Rightarrow x^2 + 5x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \checkmark \\ x = -5 \text{ غ ق ق} \end{cases} \\ x < -1 \Rightarrow -(x+1)(x+4) = 4 \Rightarrow x^2 + 5x + 8 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{بدون جواب} \end{cases}$$

بنابراین $x = 0$ تنها جواب معادله است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۱۰

دامنه تابع را به دست می آوریم:

با توجه به نمودار $-b = 2$ و در نتیجه $b = -2$ است.

$$x + b > 0 \Rightarrow x > -b$$

$$f(4) = 0 \Rightarrow a + \log_7(4^{-2}) = 0 \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$f(x) = -1 + \log_7(x^{-2}) \Rightarrow f(6) = -1 + \log_7 6 = -1 + 2 = 1$$

خواهیم داشت:

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۱۱

$$f(t) = A \cdot k^{\frac{t}{10}} \Rightarrow f(t) = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} \Rightarrow 2 = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \log\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} = \log\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow -\frac{t}{10} \log 2 = -\log 3$$

$$\Rightarrow \frac{t}{10} = \frac{\log 3}{\log 2} \Rightarrow \frac{t}{10} = \frac{0.477}{0.301} \Rightarrow t = 16$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۱۲

از معادله $\log x + \log(x^2 - 8x + 17) = \log 6$ داریم:

$$x(x^2 - 8x + 17) = 6 \Rightarrow x^3 - 8x^2 + 17x - 6 = 0$$

$$27 - 72 + 51 - 6 = 0$$

با کمی جستجو $x = 3$ می خورد:پس در تجزیه $x - 3$ داریم:

$$(x - 3)(x^2 - 5x + 2) = 0$$

با تقسیم بر $x - 3$ به دست آمد

$$\left[\frac{b}{a}\right] = \left[\frac{17}{5}\right] = 3 \text{ و بنابراین: } \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \text{ و } x = 3, \frac{5 \pm \sqrt{25 - 8}}{2} \text{ پس ریشه ها}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۳

باتوجه به داده های سؤال داریم:

$$\begin{cases} \log_c a^r b = r \Rightarrow c^r = a^r b \\ \log_{c^r} a^r b^r = 1 \Rightarrow c^r = a^r b^r \Rightarrow c = \frac{1}{ab^r} \Rightarrow ac = \frac{1}{b^r} = b^{-r} \end{cases}$$

حال خواسته سؤال را ساده می کنیم:

$$a^r c^r \times \log_b a \times \underbrace{c^{\log_b c}}_{c^{\log_b ac}} \times \underbrace{\log_a b^{a^{-r}}}_{a^{-r} \times \log_a b} = \log_b a \times \log_a b \times a^{-r} \times a^r c^r \times c^{\log_b \frac{1}{b^r}}$$

$$= a^{-r} \times a^r c^r \times c^{-r} = 1$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$\log_y^x - 6 \log_x^y = 5$$

در معادله

۲۱۴

اگر به جای $\log_y^x$ ، t قرار دهیم داریم:

$$= t - \frac{6}{t} = 5 \Rightarrow t^2 - 5t - 6 = 0$$

حالا با شرط $y < 1 < x$ باید $\log_y^x$ منفی باشد، پس $t = \log_y^x = -1$ را قبول می‌کنیم و داریم: $xy = 1$

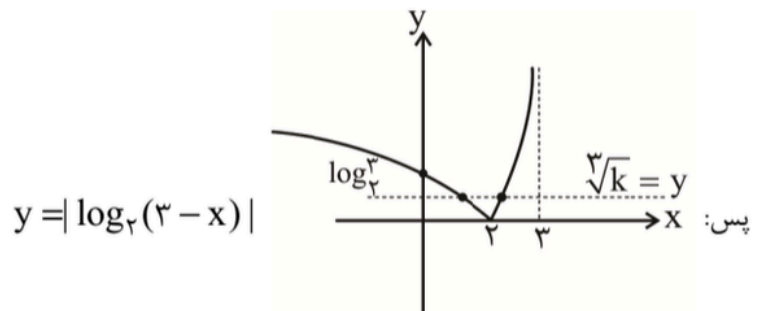
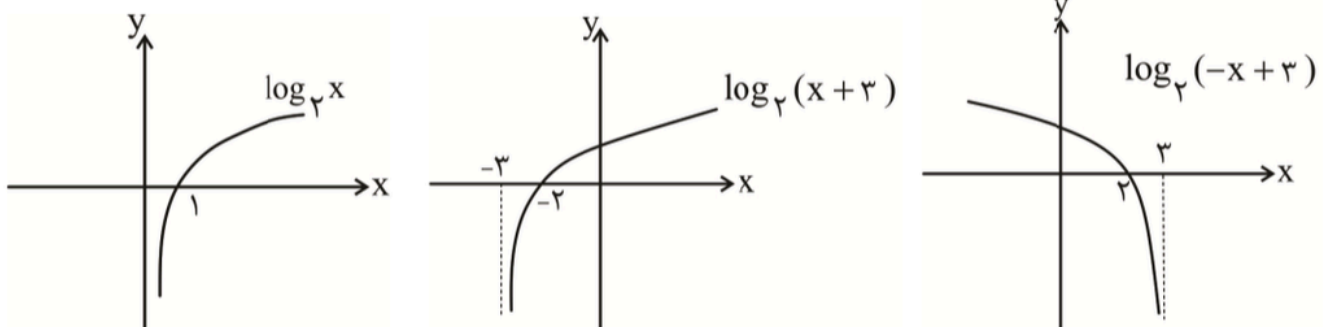
$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} = \frac{1+y+1+x}{(1+x)(1+y)} = \frac{2+x+y}{1+x+y+xy} = 1$$

حالا:

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نمودار $y = |\log_2(3-x)|$ را رسم می‌کنیم.

۲۱۵

حالا تلاقی آن با $y = \sqrt[3]{k}$ دو جواب مثبت دارد، پس:

$$0 < \sqrt[3]{k} < \log_2^3$$

$$\log_2^3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0.48}{0.3} = 1.6$$

مقدار $\log_2^3$ برابر است با:بنابراین $\sqrt[3]{k} < 1.6$ پس $k < 1.6^3$ یعنی $k < 4.096$ و بیشترین مقدار طبیعی k می‌شود ۴.

(سنگش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

خواسته سؤال را ساده می‌کنیم:

۲۱۶

$$\log 45 = \log 9 + \log 5 = \log 9 + 1 - \log 2$$

حال با استفاده از معادله‌های داده‌شده داریم:

$$\begin{cases} \log 72 = \log 8 + \log 9 = 2 \log 3 + 3 \log 2 = a \Rightarrow \log 2 = \frac{a - 2 \log 3}{3} \\ \log 30 = \log 10 + \log 3 = 1 + \log 3 = b \Rightarrow \log 3 = b - 1 \end{cases}$$

پس داریم:

$$\begin{aligned} \log 9 + 1 - \log 2 &= 2 \underbrace{\log 3}_{b-1} + 1 - \underbrace{\log 2}_{\frac{a-2 \log 3}{3}} = 2b - 2 + 1 - \frac{a - 2 \log 3}{3} \\ &= \frac{6b - 3 - a + 2b - 2}{3} = \frac{-5 + 8b - a}{3} \end{aligned}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$P(t) = A \times 2^{\frac{t}{T}} = 8 \times 2^{\frac{t}{14}} = 10^6$$

۲۱۷

$$\Rightarrow 10^6 = 2^{3 + \frac{t}{14}} \xrightarrow{\log 2} 3 + \frac{t}{14} = 19/9 \Rightarrow t = 16/9 \times 14 = 237/6$$

پس تقریباً ۲۳۸ دقیقه بعد (حدود ۴ ساعت) تعداد باکتری‌ها به یک میلیون می‌رسد.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

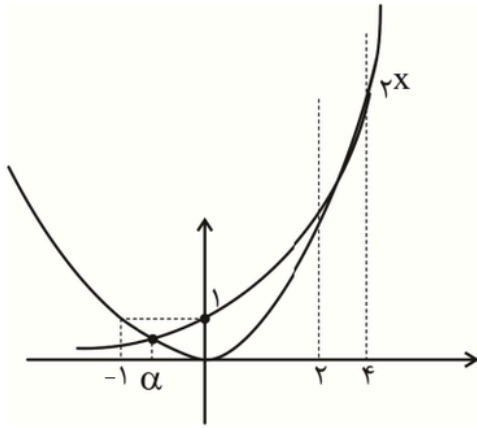
از آنجا که $\log_3^3 = \frac{1}{\log_3^2}$ است. پس داریم:

$$(\log_3^2)^{2^x} < (\log_3^2)^{x^2}$$

چون پایه نامساوی نمایی، عدد $\log_3^2$ است که عددی بین صفر و یک می باشد، پس جهت نامساوی عوض شده و داریم:

$$2^x > x^2$$

برای حل این نامعادله، از رسم نمودارهای توابع $y = 2^x$ و $y = x^2$ در یک دستگاه مختصات استفاده می کنیم:



همان طور که می بینید، نمودار $y = 2^x$ در بازه $(\alpha, 2)$ و $(4, +\infty)$ بالاتر از نمودار $y = x^2$ قرار دارد، پس مجموعه جواب این نامعادله، شامل سه عدد صحیح $x = 0, 1, 2$ در بازه $[-5, 5]$ است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

می دانیم $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$ است.

$$A = \log_{12}^{60} - \log_{12}^5 = \log_{12}^{\frac{60}{5}} = 1$$

پس:

$$B = \log_2^{\left(\frac{5}{10}\right)^4} = 4 \times \log_2^{\frac{1}{2}} = -4$$

بنابراین $A \times B = -4$ است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

طرفین را بر $x^{\frac{1}{2}}(\log x)^{\frac{1}{2}}$ تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}(\log x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} = \frac{(\log x)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}(\log x)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(\log x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} = \frac{(\log x)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \left(\frac{x}{\log x}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = \left(\frac{\log x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

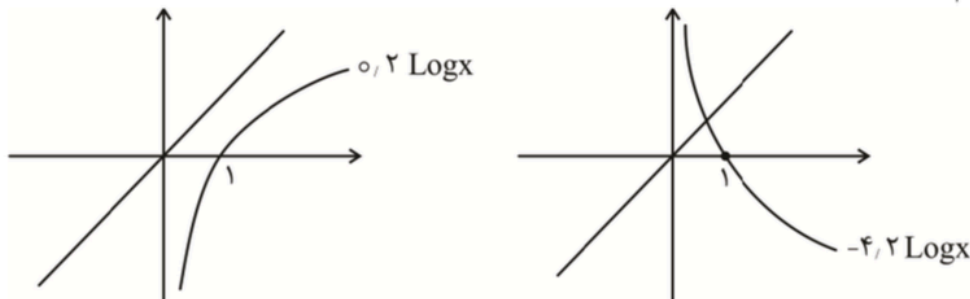
$\left(\frac{x}{\log x}\right)^{\frac{1}{2}}$ را t فرض می‌کنیم.

$$t + \frac{1}{2} = \frac{1}{t} \xrightarrow{\times t} t^2 + \frac{1}{2}t = 1 \xrightarrow{+ \frac{1}{4}} t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\rightarrow (t + \frac{1}{4})^2 = \frac{5}{4} \rightarrow t = \pm \sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{x}{\log x} = \sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{4} \\ \frac{x}{\log x} = -\sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = (\sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{4}) \log x \\ x = (-\sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{4}) \log x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \log x \\ x = -\frac{1}{2} \log x \end{cases}$$

نمودارهای توابع بالا را رسم می‌کنیم.



معادله فقط یک ریشه قابل قبول دارد.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$\log x + \log x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} = \log x(x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}) = \log(x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x)$$

می‌توان نوشت:

فرض می‌کنیم:

$$b = \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} \quad \text{و} \quad a = \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}$$

$$x = a - b \rightarrow x^{\frac{3}{2}} = (a - b)^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}ab(a - b)$$

$$x^{\frac{3}{2}} = (\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}})^{\frac{3}{2}} - (\sqrt[3]{1 - \sqrt{2}})^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(\underbrace{\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} \times \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}}}_{\sqrt[3]{1 - 2} = -1}) \times (\underbrace{\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} - \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}}}_x)$$

$$x^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{3}{2}x$$

$$x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x = \frac{3}{2}\sqrt{2} \rightarrow \log(x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x) = \log \frac{3}{2}\sqrt{2} = \log \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \log 2$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

ابتدا مقادیر داده شده را به دست می آوریم.

$$f(\log_3^{\sqrt{2}+1}) = \frac{3^{2\log_3^{\sqrt{2}+1}} - 1}{3^{2\log_3^{\sqrt{2}+1}} + 1} = \frac{3^{\log_3^{\sqrt{2}+1})^2} - 1}{3^{\log_3^{\sqrt{2}+1})^2} + 1} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2 - 1}{(\sqrt{2}+1)^2 + 1}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}+4} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2+\sqrt{2}} \times \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(\log_3^{\sqrt{2}-1}) = \frac{3^{2\log_3^{\sqrt{2}-1}} - 1}{3^{2\log_3^{\sqrt{2}-1}} + 1} = \frac{3^{\log_3^{\sqrt{2}-1})^2} - 1}{3^{\log_3^{\sqrt{2}-1})^2} + 1} = \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}$$

$$\log_3^{A+1} = \log_3^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \log_3^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{بنابراین } A = \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-2}{2} \text{ و داریم:}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گزینه ۱ درست است.

مجموع و حاصل ضرب ریشه ها را تشکیل می دهیم:

$$S = \log_3^a + \log_3^b = 4 \Rightarrow \log_3^{ab} = 4 \Rightarrow ab = 3^4 = 81$$

$$p = \log_3^a \times \log_3^b = 1 \Rightarrow \log_3^a = \frac{1}{\log_3^b} \Rightarrow \log_3^a = \log_3^3$$

حاصل هر یک از عبارت های خواسته شده را محاسبه می کنیم:

$$\frac{\log_3^a}{\log_3^{\sqrt[3]{3}}} = \frac{\frac{1}{2} \log_3^a}{\frac{1}{3} \log_3^3} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$ab = 81$$

$$\log_{ab}^a \log_{ab}^b = \frac{\log_3^a}{\log_3^{ab}} \frac{\log_3^b}{\log_3^{ab}} = \frac{\log_3^a \log_3^b}{(\log_3^{ab})^2} = \frac{1}{16}$$

نهایتاً حاصل کل عبارت خواسته شده را به دست می آوریم:

$$\frac{3}{2} - 81 - 16\left(\frac{1}{16}\right) = -80$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$\left. \begin{aligned} (\circ / \circ ۴)^a &= \left(\frac{1}{۲۵}\right)^a = ۵^{-۲a} \\ ۲\sqrt[۵]{۳۲} &= ۲ \times ۲^{\frac{۵}{۸}} = ۲^{\frac{۱۳}{۸}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow ۵^{-۲a} = ۲^{\frac{۱۳}{۸}}$$

$$\left(\frac{1}{۲}\right)^b = ۲۵ \Rightarrow ۲^{-b} = ۵^۲ \Rightarrow ۵ = \sqrt{۲^{-b}} = ۲^{\frac{-b}{۲}}$$

$$۵^{-۲a} = \left(۲^{\frac{-b}{۲}}\right)^{-۲a} = ۲^{ab} = ۲^{\frac{۱۳}{۸}} \Rightarrow ab = \frac{۱۳}{۸}$$

$$\frac{۱۱۲}{۲۶} \times ab = \frac{۱۱۲}{۲۶} \times \frac{۱۳}{۸} = ۷ \rightarrow \log_{۴۹}^۷ = \frac{1}{۲}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)